1. SISTEME ALGEBRICE
Mulţimi şi submulţimi. Operaţii cu mulţimi. Vectori. Corespondenţe şi funcţii. Relaţii. Modele şi sisteme algebrice

1.1. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine elementele mulţmii $\{\{5,6,7\},8,\varnothing\}$?

Rezolvare: A este o mulţime care are trei elemente. Primul element este mulţimea $\{5,6,7\}$, al doilea este numărul întreg 8, iar al treilea este mulţimea vidă.

2. Să se determine prin enumerare mulţimea $A=\{x\in Z \mid (x-3)(x^2-1)=0$ şi $x\geq 0\}$.

Rezolvare: A este mulţimea valorilor întregi pozitive a rădăcinilor ecuaţiei $(x-3)(x^2-1)=0$. Prin urmare $A=\{1,3\}$.

3. Să se propună o procedură generatoare pentru mulţimea $A=\{1,2,4,8,16,32,64,...\}$.

Rezolvare:

a) $x_1=1$, $x_2=2$.

b) $x_{i+1}=2^i$, $i=1,2,3,4,\ldots$

4. Care dintre relaţiile de mai jos sunt adevărate?

a) $\varnothing \in \varnothing$; b) $\varnothing \subseteq \varnothing$; c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; d) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

Rezolvare:

a) fals, deoarece mulţimea vidă prin definiţie nu conţine elemente;

b) adevărat, deoarece mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi, inclusiv şi a mulţimii vide;

c) adevărat, deoarece mulţimea dată $\{\varnothing\}$ conţine un element - $\varnothing$;

d) adevărat, deoarece mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi, inclusiv şi a mulţimii $\{\varnothing\}$.

5. Fie mulţimea $B=\{0,1\}$. Să se determine elementele lui $\rho(\rho(B))$.

Rezolvare: Mulţimea $\rho(B)$ care conţine toate submulţimile mulţimii B (inclusiv mulţimea vidă şi B) se numeşte *booleanul* lui B. Numărul elementelor unei mulţimi finite se numeşte *cardinalul* acestei mulţimi.

$\rho(B)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

$\rho(\rho(B))=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0,1\}\}, \{\varnothing, \{0\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, \{0,1\}\}, \{\{1\}, \{0,1\}\}, \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}, \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}\}$.

Mulţimea B este finită şi are cardinalul $|B|=2$. Booleanul mulţimii B are cardinalul $|\rho(B)|=2^2=4$.

Mulţimea $\rho(B)$ este finită şi are cardinalul $|\rho(B)|=4$. Booleanul mulţimii $\rho(\rho(B))$ are cardinalul $|\rho(\rho(B))|=2^4=16$.

6. Să se determine cardinalul mulţimii $A=\{(x,y)\in N\times N| \ x+3y=2001\}$.

Rezolvare: Scriem $3y=2001-x \Rightarrow y=667-\frac{x}{3} \Rightarrow x=3k \Rightarrow y=667-k$, unde $0 \le k \le 667$. Deci cardinalul mulţimii date $|A|=668$.

7. Notaţia $m|n$, unde $m, n\in Z$ înseamnă că m este divizorul lui n. Să se determine mulţimea $A\cap B$, dacă: $A=\{x\in N \mid 12|x\}$ şi $B=\{x\in N \mid 8|x\}$.

Rezolvare: Mulţimea A este alcătuită din numere naturale ce se împart la 12, $A=\{12, 24, 36, 48, ...\}$, iar mulţimea B este alcătuită din numere naturale ce se împart la 8, $B=\{8, 16, 24, 32, ...\}$.

Intersecţia a două mulţimi A şi B se numeşte mulţimea $A\cap B$, care conţine toate elementele comune ale acestor două mulţimi.

Atunci $A\cap B=\{24k \mid k\in N\}$.

8. Fie $A\in R$ şi $B\in R$, $A=(-1, 2]$ şi $B=[1, 4)$. Să se determine mulţimile $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

Rezolvare:

Reuniunea a două mulţimi A şi B se numeşte mulţimea $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ sau } x\in B\}$.

Diferenţa a două mulţimi A şi B se numeşte mulţimea $A \setminus B=\{x \mid x\in A$ şi $x\notin B\}$.

$A\cup B=(-1, 4)$, $A\cap B=[1, 2]$, $A\setminus B=(-1, 1)$, $B\setminus A=(2, 4)$.

9. Pentru o familie de mulţimi A_n, $n\in N$ să se determine $\bigcup\limits_{n\in N} A_n$ şi $\bigcap\limits_{n\in N} A_n$, $A_n=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\right\}$.

Rezolvare: $\bigcup\limits_{n\in N} A_n=\left\{x\in R \mid x=\frac{1}{n}, n\in N\right\}$, $\bigcap\limits_{n\in N} A_n=\{1\}$

10. Fie $U=[0,1]$ o mulţime universală. Să se determine complementara următoarei mulţimi: $A=\{0,1\}$

Rezolvare: Complementara mulţimii A în U (U-mulţimea universală) se numeşte mulţimea $C_u A=\overline{A}=\{x \mid x\in U$ şi $x\notin A\}$. Prin urmare: $C_u A=\overline{A}=(0,1)$.

11. Să se determine mulţimile nevide, care îndeplinesc simultan condiţiile:

$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5\}$
$A\cap C=\{4\}$
$C\setminus A=\{1,2,3\}$
$B\setminus A=\{1\}$
$3\notin A\cup B$
$B\Delta C=\{5,2,3\}$

Rezolvare: $A=\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},4,5\} \Rightarrow A=\{4,5\}$
$B=\{1,\cancel{2},\cancel{3},4,5\} \Rightarrow B=\{1,4,5\}$
$C=\{1,2,3,4,\cancel{5}\} \Rightarrow C=\{1,2,3,4\}$

12. Să se determine mulţimile nevide, care îndeplinesc simultan condiţiile:

$A\times\{1, 2, 4\}\subseteq\{1, 2, 3, 5\}\times B$;
$\{1, 2, 3\}\times B\subseteq A\times\{1, 2, 4, 5\}$;
$(5, 3)\notin A\times B$;
$(1, 5)\in A\times B$;
$A\Delta B=\{3, 4, 5\}$

Rezolvare: $M \times N \subseteq A \times B \Rightarrow M \subseteq A$ şi $N \subseteq B$.

1. $A \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4\} \subseteq B$;

2. $\{1, 2, 3\} \subseteq A$, $B \subseteq \{1, 2, 4, 5\}$;

$$A = \{1,2,3,\cancel{4},\cancel{5}\} \quad \Rightarrow \quad A=\{1, 2, 3\};$$

$$B = \{1,2,\cancel{3},4,5\} \quad \Rightarrow \quad B=\{1, 2, 4, 5\}.$$

13. Sunt date mulţimile E, F şi G. Să se determine dacă mulţimile A şi B sunt egale.

$$A=E\times(F\cup G) \qquad\qquad B=(E\times F)\cup(E\times G)$$

Rezolvare:

$E\times(F\cup G)=\{(x,y) \mid x\in E, y\in F\cup G\}=\{(x,y) \mid x\in E, y\in F \text{ sau } y\in G\}$;

$(E\times F)=\{(x,y) \mid x\in E, y\in F\}$;

$(E\times G)= \{(x,y) \mid x\in E, y\in G\}$;

$(E\times F)\cup(E\times G)=\{(x,y) \mid x\in E, y\in F, y\in G\}$.

Observăm că $A\subseteq B$ şi $B\subseteq A$. De aici reese că $A=B$.

14. Să se demonstreze echivalenţa: $((S \cup T)\text{-}R)\equiv((S\text{-}R)\cup(T\text{-}R))$.

Demonstraţie: Pentru a demonstra echivalenţa a două expresii E şi F, trebuie să:

a) luăm un element arbitrar x din E şi să demonstrăm că el aparţine şi lui F,

b) luăm un element arbitrar y din F şi să demonstrăm că el aparţine şi lui E.

a) Începem cu presupunerea că x aparţine expresiei din stânga. Succesiunea etapelor este arătată în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1

Nr.	Etapa	Justificarea
1	x este din $((S\cup T)\text{-}R)$	dat
2	$x \in (S\cup T)$	definiţia operaţiei “-” şi (1)
3	$x \notin R$	definiţia operaţiei “-” şi (1)
4	$x \in S$ sau	definiţia operaţiei “$\cup$” cu (1) şi (2)
5	$x \in T$	definiţia operaţiei “$\cup$” cu (1) şi (2)
6	$x \in (S–R)$ sau	definiţia operaţiei “-” cu (4) şi (3)
7	$x \in (T\text{-}R)$	definiţia operaţiei “-” cu (5) şi (3)
8	$x \in ((S\text{-}R)\cup(T\text{-}R))$	definiţia operaţiei “$\cup$” cu (6) şi (7)

Am ajuns la concluzia, că x aparţine şi părţii drepte. Deoarece x a fost luat arbitrar, partea stângă este submulţime a părţii drepte: $((S \cup T)-R) \subseteq ((S-R) \cup (T-R))$. Mai trebuie să demonstrăm, că şi partea dreaptă este submulţime a părţii stângi.

b) Presupunem că $x \in ((S-R) \cup (T-R))$. Succesiunea etapelor este arătată în tabelul 1.2.

Tabelul 1.2.

Nr.	Etapa	Justificarea
1	x este din $((S-R) \cup (T-R))$	dat
2	$x \in$ (din $S-R$) sau	definiţia operaţiei "$\cup$" şi (1)
3	$x \in (T-R)$	definiţia operaţiei "$\cup$" şi (1)
4	$x \in S$	definiţia operaţiei "-" şi (2)
5	$x \notin R$	definiţia operaţiei "-" şi (2)
6	$x \in T$	definiţia operaţiei "-" şi (3)
7	$x \in (S \cup T)$	definiţia operaţiei "$\cup$" cu (4) şi (6)
8	$x \in ((S \cup T)-R)$	definiţia operaţiei "-" cu (7) şi (5)

Din tabelul 1.2 reese că $((S-R) \cup (T-R)) \subseteq ((S \cup T)-R)$.

Din tabelul 1.1 şi 1.2 reese că $((S-R) \cup (T-R)) \equiv ((S \cup T)-R)$.

15. Să se reprezente grafic M^2, N^2, P^2, $M \times N$, $M \times P$, $N \times P$, dacă:

$$M=\{-2,1\} \cup \{0, 2\},$$
$$N=\{-2, 1\} \cup [0, 2],$$
$$P=[-2,1] \cup [0,2].$$

Rezolvare:

$M=\{-2, 1, 0, 2\}$,

$M^2=M \times M=\{-2, 1, 0, 2\} \times \{-2, 1, 0, 2\}$ (fig. 1.1).

$N=\{-2, 1\} \cup [0, 2]=\{-2\} \cup [0, 2]$,

$N^2 = (\{-2\} \cup [0,2]) \times (\{-2\} \cup [0,2])$ (fig. 1.2).

$P=[-2,1] \cup [0,2]=[-2, 2]$, $P^2 = [-2,2] \times [-2,2]$ (fig. 1.3).

$M \times N = \{-2,1,0,2\} \times (\{-2\} \cup [0,2])$ (fig. 1.4).

$M \times P = \{-2,1,0,2\} \times [-2,2]$ (fig. 1.5).

$N \times P = (\{-2\} \cup [0,2]) \times [-2.2]$ (fig. 1.6).

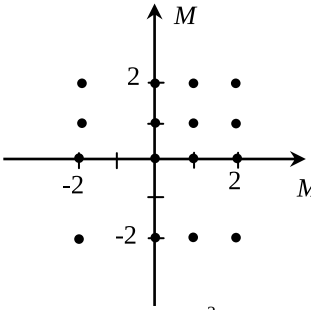


Fig.1.1. M^2

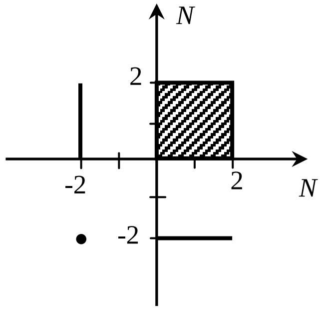


Fig. 1.2. N^2

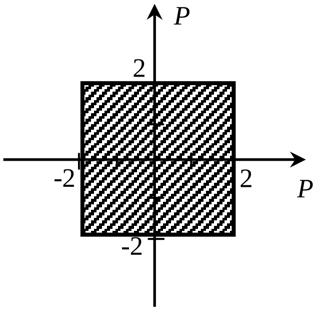


Fig. 1.3. P^2

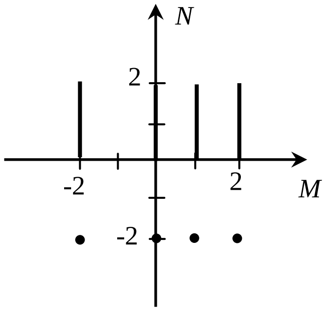


Fig. 1.4. MxN

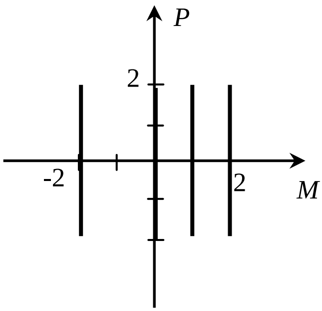


Fig 1.5. MxP

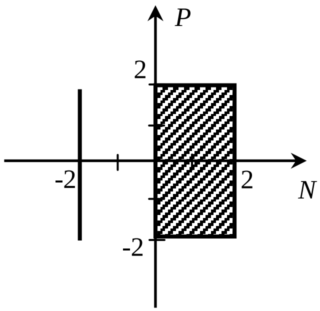


Fig. 1.6. NxP

16. Să se demonstreze că reuniunea a două mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie: Mulţimile de cardinal N (mulţimea numerelor naturale) se numesc *numărabile.*

Presupunem mulţimile disjuncte.

Fie mai întîi un exemplu numeric:

$$A=\{1,3,5,\ldots, (2n\text{-}1),\ldots\},(n=1,2,3,\ldots)$$

$$B=\{2,4,6,\ldots,2n,\ldots\}.$$

Reuniunea lor, C, o scriem "ţesînd" elementele celor două mulţimi, astfel: $C=\{1,2,3,4,\ldots,(2n\text{-}1), 2n, \ldots\}$. Am obţinut mulţimea numerelor naturale, deci o mulţime numărabilă.

În general, fie două mulţimi numărabile:

$$A=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$$

$$B=\{b_{1,}, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}$$

Facem mulţimea reuniune $C=A\cup B$, alternînd cîte un element din mulţimea A cu cîte unul din mulţimea B. Ca şi în exemplul de mai sus, obţinem: $C=\{a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ... a_n, b_n ... \}$.

Mulţimea C este de asemenea numărabilă, întrucît fiecare element al ei poate fi atins după un număr oarecare de paşi (de exemplu, a_2 poate fi atins după 3 paşi, b_2 după 4 paşi, în general a_j după $(2j\text{-}1)$ paşi, iar b_j după $2j$ paşi).

17. Să se demonstreze că orice submulţime a unei mulţimi numărabile este finită sau numărabilă.

Demonstraţie: Fie de exemplu $A=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$. Să extragem din A primele patru elemente. Obţinem: $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}\cup\{a_5, a_6,\ldots, a_n, ...\}$. Mulţimea $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ este finită.

Mulţimea $\{a_5,a_6,\ldots, a_n, ...\}$ este echivalentă cu mulţimea numerelor naturale, căci putem forma mulţimea C a perechilor $\{(a_{5,}1), (a_6,2),\ldots,(a_n,(n\text{-}4)),\ldots\}$, deci este o mulţime numărabilă.

18. Să se demonstreze că orice mulţime infinită A conţine o submulţime numărabilă B.

Demonstraţie: Fie A o mulţime infinită, ale cărei elemente nu sunt aşezate într-un şir; ele nu au cîte un număr de ordine.

Să extragem din A un element; oricare ar fi el şi să-l numim $a_{1.}$. Mulţimea A, care era infinită, a rămas tot o mulţime infinită. Extragem un alt element; să-l numim a_2. Mulţimea a rămas tot infinită. Extragem pe rînd din ea alte elemente, pe care le notăm a_3,

a_4, a_5, …. Deoarece mulţimea A este infinită, acest proces este nesfîrşit şi obţinem un şir de elemente a_1, a_2, a_3, ..., a_n,.. care formează mulţimea numărabilă B căutată.

19. Să se stabilească proprietăţile corespondenţei dintre mulţimea A şi mulţimea B (aplicaţia $f : A \to B$).

$$A=\{0,1,4\}$$
$$B=(-\infty, +\infty)$$

legea de legătură: $y = 2x$.

Rezolvare: Pe baza legii de legătură, se stabilesc valorile lui $y \in B$ cînd x ia valori din A:

x	0	1	4
y	0	2	8

Fiecărui element x din A i-a corespuns un element y din B: $0\to0$, $1\to2$, $4\to8$; am aplicat mulţimea A în mulţimea B; corespondenţa este funcţională, deoarece fiecărui element $x \in A$ i-a corespuns un singur element $y \in B$. Se observă că toate elementele x din A au intrat în corespondenţă, corespondenţa este total definită. Corespondenţa nu este surjectivă, deoarece nu toate elementele y din B au intrat în corespondenţă.

20. Să se stabilească $f \circ g$ şi $g \circ f$ ale următoarelor funcţii:

$$f(x)=x^2 \text{ şi } g(x)=\sqrt{x}$$

Rezolvare: Fie $f: A\to B$ şi $g: B\to C$. Funcţia $h: A\to C$ se numeşte compoziţia funcţiilor f şi g (se notează $f \circ g$), dacă are loc egalitatea $h(x)=g(f(x))$. Avem:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |x|$$

21. Să se stabilească proprietăţile corespondenţei dintre mulţimea lunilor anului şi mulţimea $\boldsymbol{N}_{12}$ a numerelor întregi de la 1 până la 12.

Rezolvare: Reprezentarea lunilor anului prin numerele lor este o bijecţie între mulţimea lunilor şi mulţimea $\boldsymbol{N}_{12}$ a numerelor întregi de la 1 până la 12.

22. Să se definească două mulţimi A şi B şi o corespondenţă (o aplicaţie $f: A \to B$) care ar permite interpretarea situaţiei: „dicţionarul englez-român”.

Rezolvare: Dicţionarul englez-român stabileşte corespondenţa dintre mulţimea cuvintelor engleze (mulţimea A) şi cuvintelor române (mulţimea B). Această corespondenţă nu este funcţională pentru că, de obicei, unui cuvânt englez se pune în corespondenţă mai multe cuvinte române. Această corespondenţă nu este total definită, pentru că nu toate cuvintele engleze sunt în dicţionar.

23. Sunt date mulţimile Q_z –mulţimea numerelor întregi şi Q_{2z}- mulţimea numerelor pare întregi. Să se demonstreze că algebrele $(Q_z; +)$ şi $(Q_{2z}; +)$ sunt izomorfe.

Demonstraţie: Setul $A = < M, \Omega >$, în care Ω este o mulţime de operaţii definite pe mulţimea M, se numeşte *algebră*. Observăm, că algebrele $(Q_z; +)$ şi $(Q_{2z}; +)$ sunt de acelaşi tip (tipul 2). Izomorfizmul algebrei A în algebra B este aplicaţia $\Gamma_{2n} : n \to 2n$, care îndestulează condiţia: $2(a+b)=2a+2b$.

1.2. PROBLEME PROPUSE

1. Care dintre relaţiile de mai jos sunt juste?
   a) $\{a\}\in\{a,b,c\}$
   b) $a\in\{a,b,c\}$
   c) $\{a,b\}\in\{a,b,c\}$
   d) $\{b,c\}\in\{a,b,c\}$

2. Pentru cazurile de mai jos să se verifice dacă mulţimile A şi B sunt egale.
   a) $A=\{1,(2,5),6\}$, $B=\{1,2,5,6\}$;
   b) $A=\{2,4,5\}$, $B=\{5,2,4\}$;
   c) $A=\{1,4,2\}$, $B=\{1,2,4\}$;
   d) $A=\{2,4,5\}$, $B=\{2,4,3\}$;
   e) $A=\{1,\{2,5\},6\}$, $B=\{1,\{5,2\},6\}$;
   f) $A=\{1,\{2,7\},8\}$, $B=\{1,(2,7),8\}$.

3. Fie $U=[0,1]$ o mulţime universală. Să se determine complementara următoarelor mulţimi:
   a) $B=(1/4,1/2)$
   b) $C=(0,1/2]$
   c) $D=\{1/4\}\cup[3/4,1)$.

4. Pentru mulţimea $B=\{a, b\}$ să se determine:
   a) este oare justă relaţia $B\in B$?
   b) care sunt elementele lui $\rho(B)$?
   c) care sunt elementele lui $\rho(\rho(B))$?

5. Să se determine care din cele două relaţii sunt juste:
   a) $\{1, 2\}\in\{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ sau $\{1,2\}\subseteq\{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;
   b) $\{1, 2\}\in\{1, 2, \{1, 2\}\}$ sau $\{1, 2\}\subseteq\{1, 2, \{1, 2\}\}$.

6. Să se determine cardinalul mulţimii

$$A=\{(x,y)\in N\times N \mid 5x+3y=1980\}.$$

7. Să se definească prin enumerare următoarele mulţimi:
   a) $A=\{x\in R \mid x(x+5)=14\}$;
   b) $A=\{x\in R \mid x^3-3x^2+2x=0\}$;
   c) $A=\{x\in R \mid x+1/x \le 2 \text{ şi } x>0\}$;

d) $A=\{x\in N \mid x^2-3x-4 \le 0\}$;

e) $A=\{x\in N \mid \log_{1/2}1/x<2\}$;

f) $A=\{x\in R \mid \cos^2 2x=1$ şi $0 < x \le 2\pi\}$;

8. Să se definească prin enumerare următoarele mulţimi: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă:

$$A=\{x\in R \mid x^2+x-20=0\},$$
$$B=\{x\in R \mid -x^2+x+12=0\}.$$

9. Notaţia $m|n$, unde $m,n\in Z$ înseamnă că m este divizorul lui n. Să se definească mulţimile:

a) $\{x\in N \mid x|8$ şi $x\neq 1\}$;

b) $\{x\in N \mid x|12\}\cap\{x\in N \mid x|8\}$;

c) $\{x\in Z \mid 8|x\}$.

10. Fie $A=\{x\in N \mid 2< x \le 7\}$, $B=\{x\in N \mid 1 \le x< 5\}$, $C=\{x\in N \mid x^2-9=0\}$. Să se determine elementele mulţimilor:

a) $B\cup C$; b) $A\cap B\cap C$;

c) $A\cup B\cup C$; d) $(A\cap B)\cup(B\cup C)$;

e) $B\times C$; f) $C\times B$.

11. Să se demonstreze că, pentru $(\forall)$ $m\in R$, mulţimea $\{x\in R \mid x^2+2(m+1)x+m=0\}\cup\{x\in R \mid x^2+2mx+m-1=0\}$ are exact patru elemente.

12. Pentru o familie de mulţimi A_n, $n\in N$ să se determine $\bigcup\limits_{n\in N} A_n$ şi $\bigcap\limits_{n\in N} A_n$:

a) $A_n=\{3n-2, 3n-1\}$;

b) $A_n=\{x\in Z \mid -n\le x \le n\}$.

13. Să se determine mulţimile nevide, care îndeplinesc simultan condiţiile:

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$; $A\cap B=\{3,4\}$;
$A\setminus B=\{1,2\}$; $B\setminus A=\{5\}$.

b) $C\times\{1,2,4\}\subseteq\{1,2,3,5\}\times B$;
$\{1,2,3\}\times B\subseteq C\times\{1,2,4,5\}$;
$(5,3)\notin C\times B$; $(1,5)\in C\times B$; $C\Delta B=\{3,4,5\}$;

c) $A\cap C=\{1,2,5\}$; $C\Delta B=\{1,5,4,6\}$;

$B \cup C = \{1,2,4,5,6\}$; $C \setminus A = \{6\}$;

d) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$; $A \cap B = \{1,2\}$;

$5 \notin A \setminus B$; $|A| > |B|$;

14. Să se verifice egalităţile:

a) $(S \cup (T \cap R)) \equiv ((S \cup T) \cap (S \cup R))$;

b) $(S - (T \cup R)) \equiv ((S - T) - R)$;

c) $E \times (F \cap G) = (E \times F) \cap (E \times G)$;

d) $E \cup (F \times G) = (E \cup F) \times (E \cup G)$;

e) $E \cap (F \times G) = (E \cap F) \times (E \cap G)$.

15. Să se reprezinte grafic mulţimile A^2, B^2, C^2, $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, dacă:

a) $A = [-3, -1] \cup [1, 3]$;

$B = \{-3, -1\} \cup [1, 3]$;

$C = \{-3, -1\} \cup \{1, 3\}$.

b) $A = [2,5] \cup [3,7]$;

$B = \{2,5\} \cup [3,7]$;

$C = \{2,5\} \cup \{3,7\}$;

c) $A = \{-3,3\} \cup \{0,4\}$;

$B = \{-3,3\} \cup [0,4]$;

$C = [-3,3] \cup [0,4]$.

16. Să se demonstreze că:

a) $\rho(S) \cup \rho(T) \subseteq \rho(S \cup T)$;

b) $\rho(S) \cap \rho(T) = \rho(S \cap T)$.

17. Să se demonstreze că N^n este numărabilă oricare ar fi n.

18. Să se demonstreze că mulţimea submulţimilor finite ale mulţimii N este numărabilă.

19. Să se demonstreze că reuniunea unei mulţimi finite şi a unei mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă .

20. Să se demonstreze că reuniunea a $3,4,...,n$ mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.

21. Pentru fiecare dintre cazurile de mai jos să se stabilească proprietăţile corespondenţei dintre A şi B (aplicaţia $f : A \to B$):

a) $A = \{0,2,6\}$

$B = (-\infty, +\infty)$, legea de legătură: $y = -\frac{3}{5}x$.

b) $A = Z$

$B = Z$ legea de legătură: $y = x^2$.

c) $A = N$

$B = N$ legea de legătură: $y = x^2 + x$.

22. Să se stabilească $f \circ g$ şi $g \circ f$ pentru următoarele funcţii:

a) $f(x)=1-x$, $g(x)=x^2$; b) $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$;

c) $f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0] \\ x, x \in (0, +\infty) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0] \\ -x^2, x \in (0, +\infty) \end{cases}$;

d) $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \arcsin x$.

23. Pe mulţimea $M = \{2,4,6,8\}$ se defineşte relaţia R = “ *mai mare”*. Să se determine elementele mulţimii *R*. Să se stabilească proprietăţile relaţiei *R*. Relaţia *R* să se reprezinte grafic.

24. Să se definească două mulţimi *A* şi *B* şi o corespondenţă (o aplicaţie $f{:}A \to B$), care ar permite interpretarea fiecărei dintre situaţiile de mai jos:

a) cuprinsul unei cărţi;
b) dicţionar rus-român;
c) registrul unui hotel cu 100 camere;
d) o carte de telefoane.

25. Să se demonstreze că algebrele (R_+; $\times$) şi (R; $+$) sunt izomorfe. (R_+ - submulţimea valorilor pozitive a lui R).

1.3. INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI LA PROBLEMELE PROPUSE

1. a) fals; b) adevărat; c) fals; d) fals.

2. a) $A \neq B$; b) $A = B$; c) $A = B$;
d) $A \neq B$; e) $A = B$; f) $A \neq B$.

3. a) $C_u = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$;

b) $C_u = \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1]$;

c) $C_u = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \{1\}$.

4. b) $\rho(B)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$;
c) $\rho(\rho(B))=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\emptyset,\{a\}\}, \{\emptyset,\{b\}\},\{\emptyset,\{a,b\}\},\{\{a\},\{b\}\},\{\{a\},\{a,b\}\},\{\{b\},\{a,b\}\},\{\emptyset,\{a\},\{b\}\},\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\},\{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\},\{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{a\},\{b\}, \{a,b\}\}\}$.

5. a) $\{1,2\} \subseteq \{1,2,\{1,2,3\}\}$; b) ambele relaţii sunt juste.

6. *Rezolvare:* $3y=1980-5x \Rightarrow y=660-\frac{5x}{3} \Rightarrow x=3k \Rightarrow y=660-5k$, unde $0\leq k\leq 132$. Deci cardinalul mulţimii date $|A|=133$.

7. a) $A=\{-7,2\}$; b) $A=\{0,1,2\}$; c) $A=\{1\}$;
d) $A=\{1,2,3,4\}$; e) $A=\{1,2,3\}$;
f) $A=\left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$.

8. $A\cup B=\{-5,-3,4\}$; $A\cap B=\{4\}$; $A \setminus B=\{-5\}$; $B\setminus A=\{-3\}$.

9. a) $\{2,4,8\}$; b) $\{1,2,4\}$; c) $\{8k \mid k\in Z\}$.

10. a) $\{1,2,3,4\}$; b) $\{3\}$; c) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$; d) $\{1,2,3,4\}$;
e) $\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$; f) $\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$.

12. a) $\{n\in N \mid n\neq 3k, k\in N\}$, Ø; b) Z, $\{-1,0,1\}$.

13.a) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$;

b) $C=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,4,5\}$;

c) $A=\{1,2,5\}$, $B=\{2,4\}$; $C=\{1,2,5,6\}$;

d) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,5\}$.

14. a) adevărat; b) adevărat; c) adevărat; d) fals; e) fals.

15.a) $A=[-3,-1]\cup[1,3]$; $B=\{-3,-1\}\cup[1,3]$; $C=\{-3,-1,1,3\}$.

$A^2=A\times A=([-3,-1]\cup[1,3])\times([-3,-1]\cup[1,3])$ (fig. 1.1).

$B^2=B\times B=(\{-3,-1\}\cup[1,3])\times(\{-3,-1\}\cup[1,3])$ (fig. 1.2).

$C^2=C\times C=\{-3,-1,1,3\}\times\{-3,-1,1,3\}$ (fig. 1.3).

$A\times B=([-3,-1]\cup[1,3])\times(\{-3,-1\}\cup[1,3])$ (fig. 1.4).

$A\times C=([-3,-1]\cup[1,3])\times\{-3,-1,1,3\}$ (fig. 1.5).

$B\times C=(\{-3,-1\}\cup[1,3])\times\{-3,-1,1,3\}$ (fig. 1.6).

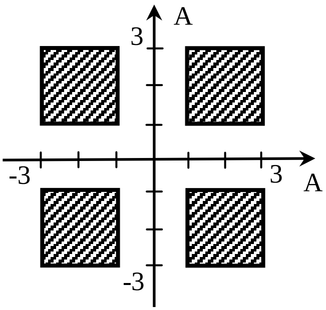


Fig. 1.1. A^2

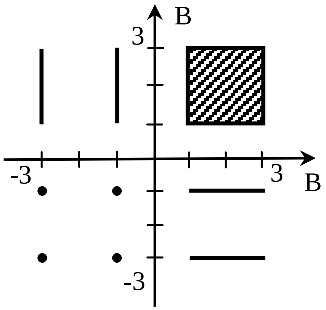


Fig. 1.2. B^2

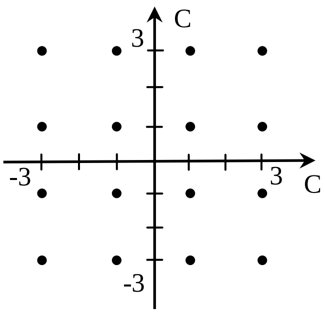


Fig. 1.3. C^2

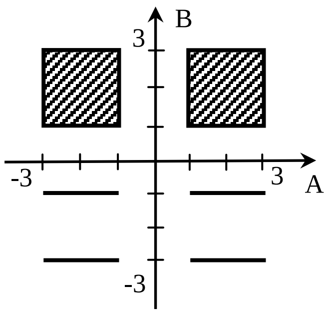


Fig. 1.4. AxB

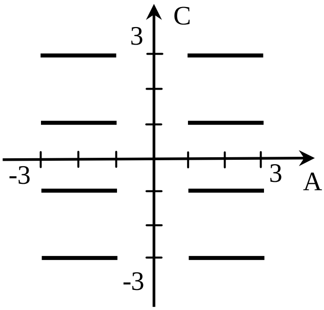


Fig. 1.5. AxC

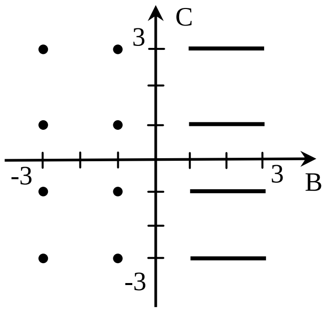


Fig. 1.6. BxC

b) $A=[2,7];\ B=\{2\}\cup[3,7];\ C=\{2,5,3,7\}.$

$$A^2=A\times A=[2,7]\times[2,7].$$
$$B^2=B\times B=(\{2\}\cup[3,7])\times(\{2\}\cup[3,7]).$$
$$C^2=C\times C=\{2,5,3,7\}\times\{2,5,3,7\}.$$
$$A\times B=[2,7]\times(\{2\}\cup[3,7]).$$
$$A\times C=[2,7]\times\{2,5,3,7\}.$$
$$B\times C=(\{2\}\cup[3,7])\times\{2,5,3,7\}.$$

c) $A=\{-3,3,0,4\};\ B=\{-3\}\cup[0,4];\ C=[-3,4].$

$$A^2=A\times A=\{-3,3,0,4\}\times\{-3,3,0,4\}.$$
$$B^2=B\times B=(\{-3\}\cup[0,4])\times(\{-3\}\cup[0,4]).$$
$$C^2=C\times C=[-3,4]\times[-3,4].$$
$$A\times B=\{-3,3,0,4\}\times(\{-3\}\cup[0,4]).$$
$$A\times C=\{-3,3,0,4\}\times[-3,4].$$
$$B\times C=(\{-3\}\cup[0,4])\times[-3,4].$$

16. a) Elementele reuniunii $\rho(S)\cup\rho(T)$ sunt submulţimile, ce aparţin mulţimii S şi submulţimile, ce aparţin mulţimii T. Prin urmare $\rho(S)\cup\rho(T)\subseteq\rho(S\cup T)$. Incluziunea inversă nu este adevărată, deoarece submulţimea reuniunii $S\cup T$ nu se conţine

neapărat toată sau în mulţimea S sau în T. Fie, de exemplu $S=\{1,2,3\}$, $T=\{4,5\}$ şi $C=\{1,2,5\}$. Într-adevăr, $C\in\rho(S\cup T)$, dar evident $C\notin\rho(S)\cup\rho(T)$.

b) Fie $C\in\rho(S)\cap\rho(T)$. Atunci $C\subseteq S$ şi $C\subseteq T$, deaceia $C\subseteq(S\cap T)$. Prin urmare $\rho(S)\cap\rho(T)\subseteq\rho(S\cap T)$. Fie $C\in\rho(S\cap T)$. Atunci $C\subseteq(S\cap T)$, deci $C\subseteq S$ şi $C\subseteq T$. Prin urmare $\rho(S\cap T)\subseteq\rho(S)\cap\rho(T)$. De aici reiese că $\rho(S)\cap\rho(T)=\rho(S\cap T)$.

19. Reuniunea unei mulţimi finite şi a unei mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.

Fie: $A=\{a_1,a_{2,}a_3,...,a_n\}$,

$B=\{b_1,b_2,b_3,...,b_n,...\}$

Dacă $A\cap B=\varnothing$, atunci reuniunea $A\cup B$ se poate scrie: $C=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n,b_1,b_2,b_3,...,b_n,...\}$, deci poate fi numerotată, adică orice element al ei poate fi atins după un număr de paşi [de exemplu: a_4 poate fi atins după 4 paşi, b_2 poate fi atins după $(n+2)$ paşi ş.a.m.d.].

Dacă mulţimile A şi B nu sunt disjuncte, demonstraţia este analogă.

Cum, $\overline{\overline{A}}=n$, $\overline{\overline{B}}=a$, $\overline{\overline{C}}=a$, din operaţia între mulţimi: $A\cup B=C$, urmează: $n+a=a$.

20. Fiind date mulţimile $A,B,C,...,N$ – presupuse disjuncte – de elemente $a_i,b_i,c_i,...,n_i$, formăm reuniunea lor:

$P=\{a_1,b_1,c_1,...,n_1,a_2,b_2,c_2,...,n_2,a_3,b_3,c_3,...\}$.

Şi această mulţime este numărabilă (a_2 poate fi atins după $(n+1)$ paşi, n_3 după $3n$ paşi ş.a.m.d.). Cum

$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{C}}=...=\overline{\overline{N}}=a$ şi $\overline{\overline{P}}=a$,

din: $\underbrace{A\cup B\cup C\cup...\cup N}_{n(finit)termeni}=P$, urmează: $\underbrace{a+a+...+a}_{n(finit)termeni}=a$

sau $a\cdot a=n$

Dacă mulţimile nu sunt disjuncte, demonstraţia se face la fel.

21. a) total definită, nu este surjectivă, funcţională, injectivă, nu este bijectivă;

b) total definită, nu este surjectivă, funcţională, nu este injectivă, nu este bijectivă.

c) total definită, nu este surjectivă, funcţională, injectivă, nu este bijectivă.

22. a) $f \circ g = 1 - x^2$, $g \circ f = (1-x)^2$

b) $f \circ g = x$, $x > 0$; $g \circ f = x$

c) $f \circ g = 0$, $g \circ f = g$

d) $f \circ g = x$, $g \circ f = \begin{cases} x + \pi, x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x - \pi, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$

23. $R = \{(4,2),(6,2),(6,4),(8,2),(8,4),(8,6)\}$. Relaţia este anti-reflexivă, nu este simetrică, este tranzitivă.

2. ALGEBRA LOGICII

Funcţiile algebrei logicii. Forme canonice. Forme de reprezentare a funcţiilor booleene. Minimizarea funcţiilor booleene. Elaborarea schemelor logice

2.1. PROBLEME REZOLVATE

1. Pentru funcţia logică

$$y=\overline{\left(\overline{x_1\oplus x_2}\downarrow\overline{x_1\rightarrow\overline{x_3\oplus x_4}}\right)\sim\left(\overline{\left(x_1\overline{x_3}\vee x_1\overline{x_4}\right)\,|\,\left(\overline{x_2\vee x_3}\downarrow\overline{x_4\sim x_2}\right)}\right)}$$

a) să se alcătuiască tabelul de adevăr;
b) să se determine FCD şi FCC;
c) să se determine forma disjunctivă minimă (FDM) şi forma conjunctivă minimă (FCM) cu ajutorul diagramei Karnaugh;
d) să se elaboreze schema logică în bazele "ŞI-NU"(NAND), "SAU-NU"(NOR).

Rezolvare:

a) Pentru a simplifica funcţia logică dată întroducem notăţiile:

$x_1\oplus x_2=\varphi_1$	$\overline{\varphi_1}=\varphi_2$	$x_3\oplus x_4=\varphi_3$	$\overline{\varphi_3}=\varphi_4$
$x_1\rightarrow\varphi_4=\varphi_5$	$\overline{\varphi_5}=\varphi_6$	$\varphi_2\downarrow\varphi_6=\varphi_7$	$\overline{x_3}=\varphi_8$
$x_1\varphi_8=\varphi_9$	$\overline{x_4}=\varphi_{10}$	$x_1\varphi_{10}=\varphi_{11}$	$\varphi_9\vee\varphi_{11}=\varphi_{12}$
$x_2\vee x_3=\varphi_{13}$	$\overline{\varphi_{13}}=\varphi_{14}$	$x_4\sim x_2=\varphi_{15}$	$\overline{\varphi_{15}}=\varphi_{16}$
$\varphi_{14}\downarrow\varphi_{16}=\varphi_{17}$	$\varphi_{12}\,|\,\varphi_{17}=\varphi_{18}$	$\overline{\varphi_{18}}=\varphi_{19}$	$\varphi_7\sim\varphi_{19}=\varphi_{20}$
$\overline{\varphi_{20}}=y$			

Alcătuim tabelul de adevăr, tabelul 2.1.

Tabelul 2.1

N	x_1	x_2	x_3	x_4	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	y
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
6	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
8	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
12	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
15	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0

b) Pentru fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 1 scriem termenii canonici conjunctivi în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 1 sau 0:

TCC: $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$ $\quad$ $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$

$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$ $\quad$ $x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$ $\quad$ $x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$

$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$ $\quad$ $x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$

Determinăm FCD, reunind TCC prin semnul disjuncţiei:

FCD: $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

La fel putem scri: FCD: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$=Σ(4-8,10,11,13)

La fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 0 scriem termenii canonici disjunctivi(TCD) în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 0 sau 1:

TCD:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \qquad \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$$
$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \qquad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$$
$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \qquad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4$$
$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \qquad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$$

Pentru a determina FCC reunim TCD prin semnul conjuncţiei:

FCC: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$ $\wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge$ $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$

La fel putem scri: FCC: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(0,1,2,3,4,9,12,14,15)$.

c) Obţinem forma minimă a funcţiei logice date cu ajutorul diagramei Karnaugh:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Fig.2.1

Combinaţiile valorilor argumentelor x_1 şi x_2 sunt dispuse în partea superioară a diagramei, iar cele ale argumentelor x_3 şi x_4

vertical în partea stângă. La intersecţia unei coloane şi a unei linii este câmpul diagramei în care se trece 0 sau 1, după cum valoarea funcţiei în tabelul de adevăr este 0 sau 1.

Dat fiind faptul, că reuniunea a două locaţii vecine a diagramei contribuie la excluderea variabilei, valoarea căreia se schimbă la trecerea de la o locaţie la alta. Reuniunea a două perechi de locaţii vecine (pe orizontală sau verticală) oferă posibilitatea excluderii din expresie a două variabile, reuniunea a patru perechi de locaţii vecine aduce la excluderea a trei variabile.

FDM se obţine prin alipirea mintermenilor prin încercuirea poziţiilor cu valoarea 1:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3$$

FCM se obţine prin alipirea mintermenilor prin încercuirea poziţiilor cu valoarea 0:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \vee x_2)\wedge(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)\wedge(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)\wedge(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4)$$

Aceste încercuiri pot cuprinde un număr 2^n (2,4,8 etc.) de locaţii vecine (adiacente) ale diagramei. Trebuie de adăugat că în diagramă, locaţiile aflate la extremurile rîndurilor sau a coloanelor se consideră adiacente şi pot participa la o încercuire de eliminare.

d) Pentru a obţine schema logică în baza "ŞI-NU" transformăm FDM, aplicând asupra ei dubla negaţie şi legile lui de Morgan:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3 =$$

$$\overline{\overline{\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3}} = \overline{\overline{\overline{x}_1x_2} \cdot \overline{x_1\overline{x}_2\overline{x}_4} \cdot \overline{x_2\overline{x}_3x_4} \cdot \overline{x_1\overline{x}_2x_3}}$$

(fig. 2.2).

În mod similar cu cazul precedent în baza "SAU-NU" transformăm FCM.:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \vee x_2)\wedge(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)\wedge(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)\wedge(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4)$$

$$=\overline{\overline{(x_1 \vee x_2)\wedge(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)\wedge(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)\wedge(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4)}}=$$

$$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)} \vee \overline{(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)} \vee \overline{(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4)}}$$

(fig. 2.3).

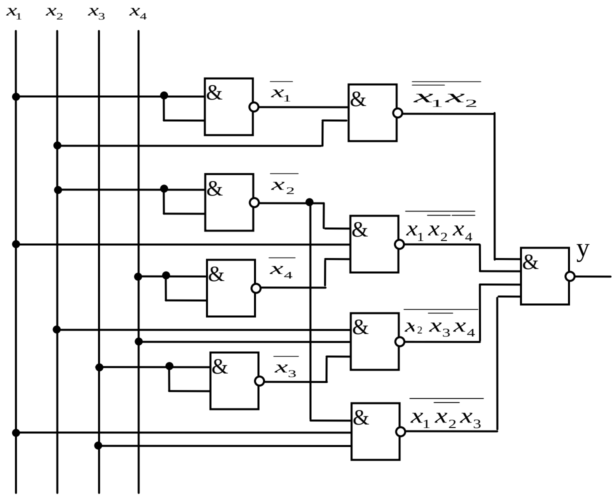


Fig. 2.2

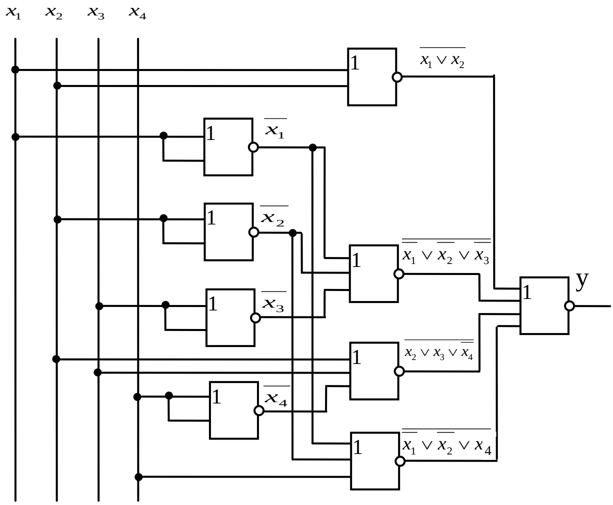


Fig. 2.3

2. Fie funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin FCD a sa:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee$$

$$\vee\, x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$$

Să se determine FDM după metoda lui Quine.

Rezolvare:

Etapa I. Determinăm forma disjunctivă prescurtată (FDP), evidenţiind toţi implicanţii primi:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$
$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$
$$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$$
$$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 x_4 = x_2\bar{x}_3 x_4$$
$$x_1 x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 = x_1\bar{x}_3 x_4$$
$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

Deoarece alipiri parţiale pentru termenii normali de rang 3 în cazul dat nu se pot opera, avem următoarea formă disjunctivă prescurtată:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

Etapa a II-a. Construim tabelul de acoperire:

Fiecare linie în acest tabel corespunde unui implicant prim, iar fiecare coloană unui TCC din FCD iniţială. Vom spune că un implicant prim se află în relaţia de acoperire cu un TCC, dacă el se conţine în acesta. Se va construi matricea acestei relaţii binare (la intersecţia liniei *i* cu coloana *j* se va pune 1, dacă implicantul prim cu numărul *i* se află în relaţia de acoperire cu TCC cu numărul *j,* şi 0 în caz contrar.) Vom alege cel mai mic număr de implicanţi primi strict necesari (esenţiali) pentru ca să fie acoperiţi toţi TCC.

Avem două posibilităţi de alegere:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 x_4$$

alegerea făcându-se la opţiune. Rezultă, că o FB poate avea mai multe forme minime.

Tabelul 2.2

Implicanţii primi	Termenii canonici conjunctivi					
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	1	0	0	0	0
$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	0	0	0	0	1
$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$	0	1	1	0	0	0
$x_2\bar{x}_3 x_4$	0	0	1	1	0	0
$x_1\bar{x}_3 x_4$	0	0	0	1	1	0
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	0	0	0	0	1	1

3. Să se determine FDM a funcţiei $f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ $\sum(0,1,2,3,4,7,8,11,12,13,15)$ după metoda lui Quine-McCluskey.

Rezolvare: Ordonăm echivalenţii binari al TCC pe nivele începând cu nivelul 0. Cuplăm conjuncţii vecine care sunt de acelaşi rang. Conjuncţia care nu se mai poate cupla cu nici o altă conjuncţie din tabel, va fi un implicant prim al funcţiei date. Implicanţii primi vom nota prin A, B, C,…

Elementele de comparare se notează cu ($\vee$). Prin cuplarea conjuncţiei cu echivalentul binar (000-) cu conjuncţia cu (001-) rezultă conjuncţia cu echivalentul binar (00--), etc.

Etapa I. Ordonarea pe nivele (fig. 2.4)

Nivelele	Echivalentul binar	Echivalentul zecimal
0	0000	0
1	0001 0010 0100 1000	1 2 4 8
2	0011 1100	3 12
3	0111 1011 1101	7 11 13
4	1111	15

Fig. 2.4

Etapa a II-a. Determinarea implicanţilor primi

	000- 00-0 0-00 -000	∨ ∨ ∨ ∨
	00-1 001- -100 1-00	∨ ∨ ∨ ∨
A	0-11 -011 110-	∨ ∨
B	-111 1-11 11-1	∨ ∨

Fig.2.5

În figura 2.5 este prezentat primul tabel de comparare (prima alipire). În figura 2.6 este prezentat al doilea table de comparare.

C D	00-- --00
E	--11

Fig.2.6

Etapa a III-a. Construim tabelul de acoperire (tab. 2.3):

Tabelul 2.3

Implicantul prim	Echivalentul zecimal al TCC iniţial										
	0	1	2	3	4	7	8	11	12	13	15
A	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
C	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1

Funcţia poate avea două FDM:

1) $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = A + C + D + E = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_3 x_4$

sau

2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = B + C + D + E = x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_3 x_4$.

Constatăm, că forma minimală nu este unică.

4. Să se reprezinte prin diagramă în timp funcţia $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$

Rezolvare:

$\overline{x_1} = \varphi_1 \qquad \overline{x_2} = \varphi_3 \qquad \varphi_3 \varphi_4 = \varphi_5$

$\varphi_1 x_2 = \varphi_2 \qquad \overline{x_3} = \varphi_4 \qquad \varphi_2 \vee \varphi_5 = \varphi_6$

Construim tabelul de adevăr al funcţiei date (tab. 2.4):

Tabelul 2.4

x_1	x_2	x_3	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

Reprezentăm grafic argumentele x_i ca funcţii de timp, ataşând valorii 0 un nivel coborât, iar valorii 1 un nivel ridicat, astfel ca să existe o diferenţiere evidentă a acestor nivele. Acelaşi lucru facem şi cu valorile funcţiei şi obţinem reprezentarea FB date prin diagramă în timp.

Diagrama temporală a funcţiei $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$ are forma prezentată în figura 2.7.

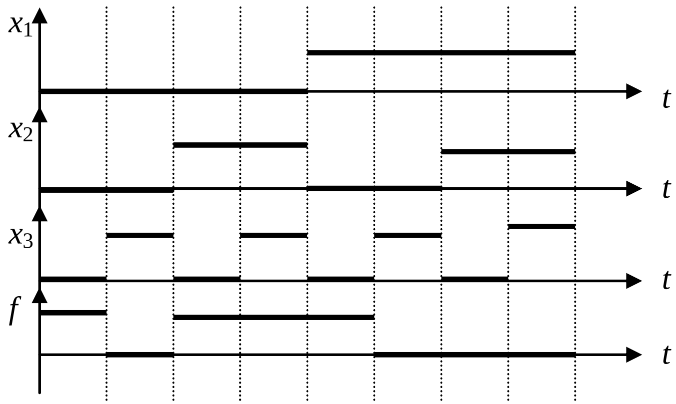


Fig.2.7

5. Fie funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin FCD a sa:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$=∑(0,1,2,3,6,7).

a) Să se determine FCM după metoda lui Quine-McCluskey.

Rezolvare:

Etapa I. Facem conversia din zecimal în binar a termenilor canonici disjunctivi (TCD)

4 - 0100	11 - 1011
5 - 0101	12 - 1100
8 - 1000	13 - 1101
9 - 1001	14 - 1110
10 - 1010	15 – 1111

Etapa II. Ordonăm pe nivele numerele binare (fig. 2.8)

Nivelele	Echivalentul binar	Echivalentul zecimal
0	0100 1000	4 8
1	0101 1001 1010 1100	5 9 10 12
2	1011 1101 1110	11 13 14

3	1111	15

Fig. 2.8

Etapa a III-a. Determinăm implicanţii primi

	010- -100 100- 10-0 1-00	∨ ∨ ∨ ∨∨ ∨∨
	-101 10-1 1-01 101- 1-10 110- 11-0	∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨
	1-11 11-1 111-	∨ ∨ ∨

Fig.2.9. Prima alipire

A B	-10- 10-- 1--0	 ∨
 C	1--1 1-1-	∨

Fig.2.10. A doua alipire

D	1---	

Fig.2.11. A treia alipire

Etapa a IV-a. Construim tabelul de acoperire (tab. 2.5):

Tabelul 2.5

Implicantul prim	Echivalentul zecimal al TCD iniţial									
	4	5	8	9	10	11	12	13	14	15
A	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
B	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
D	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = A \wedge D = \left(\overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \overline{x_1}$ - FCM.

b) Să se determine FCM cu ajutorul diagramei Karnaugh

FCM se obţine prin alipirea mintermenilor prin încercuirea poziţiilor cu valoarea 0 (fig. 2.12): $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \overline{x_1}$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

Fig.2.12

6. Să se simplifice următoarea expresie logică:

$$\left(a \vee \overline{c}\right) \wedge \left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \wedge \left(\overline{b} \vee c\right) \wedge \left(\overline{a} \vee b\right) \wedge (b \vee c)$$

Rezolvare:

$$\left(a \vee \overline{c}\right) \wedge \left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \wedge \left(\overline{b} \vee c\right) \wedge \left(\overline{a} \vee b\right) \wedge (b \vee c) = \left(a \vee \overline{c}\right) \wedge \overline{a} \wedge c =$$
$$\left(\left(\overline{a} \wedge a\right) \vee \left(\overline{a} \wedge \overline{c}\right)\right) \wedge c = \overline{a} \wedge \overline{c} \wedge c$$

2.2. PROBLEME PROPUSE

1. Să se verifice egalitatea următoarelor expresii logice:

   a) $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$ şi $\bar{x} \vee y$;

   b) $\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}$ şi $\bar{x} \vee \bar{y}$;

   c) $xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$ şi $x \vee \bar{y}$;

   d) $x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}y$ şi $x\bar{z} \vee y$;

   e) $xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}$ şi $xz \vee y \vee z$;

   f) $\bar{x} \vee y \vee \bar{x}z \vee yz$ şi $\bar{x} \vee y$;

   g) $xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$ şi $\bar{z}$;

   h) $xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$ şi z;

   i) $x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}$ şi y.

2. Să se simplifice următoarele expresii logice:

   a) $xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$;

   b) $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$;

   c) $xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$

   d) $x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}y$;

   e) $x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

   f) $xy \vee yz \vee \bar{x}y$;

   g) $xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$;

   h) $\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee yz$;

   i) $((a \vee c) \wedge (a \vee d)) \wedge (((c \vee (c \wedge b)) \wedge \bar{c}) \vee \bar{a})$;

   j) $(\bar{b} \vee d) \wedge ((\bar{d} \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee (\bar{d} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{c})) \wedge (b \vee d)$;

   k) $(((d \vee (d \wedge c)) \wedge \bar{d}) \vee \bar{b}) \wedge ((b \vee d) \wedge (b \vee a))$;

   l) $(d \vee (\bar{a} \wedge \bar{d}) \vee a) \wedge ((b \vee (d \vee (d \wedge c))) \wedge (\overline{c \wedge a}) \wedge (d \wedge \bar{a}))$.

3. Să se determine FCD şi FCC ale următoarelor funcţii logice:

a) $f(x,y,z) = x \vee y \vee xy \vee yz$

b) $f(x,y,z) = x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

c) $f(x,y,z) = x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}y$

d) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{(x_1 \oplus x_2) \downarrow x_3x_4} \rightarrow (x_1x_3 \vee x_2\overline{x_4})$

e) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2\overline{x_3} \mid \overline{x_1}x_4) \rightarrow \overline{x_1x_4} \oplus \overline{(x_1x_2 \sim x_3x_4)}$

4. Pentru funcţia logică $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (vezi tab. 2.6)

a) să se alcătuiască tabelul de adevăr;
b) să se determine FCD şi FCC;
c) să se determine FDM şi FCM;
d) să se elaboreze schema logică în bazele ŞI-NU, SAU-NU;
e) să se reprezinte funcţia prin diagramă în timp.

Tabelul 2.6

Nr. variantei	Funcţia $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$
0	$(x_2\overline{x_3} \mid \overline{x_1}x_4) \rightarrow \overline{x_1x_4} \oplus \overline{(x_1x_2 \sim x_3x_4)}$
1	$((\overline{x_1}x_2 \downarrow \overline{x_3x_4}) \oplus (x_1 \vee x_2\overline{x_3})) \sim (x_3\overline{x_2} \mid x_1x_4)$
2	$((x_1\overline{x_2} \downarrow \overline{x_3}x_4) \rightarrow (x_1x_3 \mid \overline{x_2x_4})) \oplus (\overline{x_1x_4 \sim x_2x_3})$
3	$((x_1\overline{x_2} \downarrow \overline{x_3x_4}) \oplus (\overline{x_1x_3 \vee \overline{x_2}x_4})) \sim (x_3\overline{x_4} \mid \overline{x_1}x_2)$
4	$\overline{((\overline{x_1x_2} \downarrow \overline{x_3}x_4) \oplus (x_1\overline{x_3} \vee x_2x_4)) \sim (\overline{x_3}x_4 \mid x_1\overline{x_2})}$
5	$(\overline{x_3\overline{x_4} \oplus x_1\overline{x_2}}) \rightarrow ((\overline{x_1}x_2 \downarrow x_3\overline{x_4}) \oplus x_2\overline{x_3})$
6	$\overline{(((x_1\overline{x_2}) \downarrow (\overline{x_3}x_4)) \oplus (\overline{x_2x_4} \mid \overline{x_1x_3})) \rightarrow (\overline{x_1x_2 \sim x_3x_4})}$
7	$((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_1\overline{x_3}) \downarrow ((x_3\overline{x_4}) \mid (\overline{x_1x_2})) \downarrow x_3x_4 \vee x_1\overline{x_3}$
8	$((x_3\overline{x_4} \downarrow \overline{x_1}x_2) \rightarrow (x_2x_3 \mid \overline{x_1x_4})) \oplus (\overline{x_2x_4 \sim x_1\overline{x_3}})$
9	$(\overline{x_3}x_4 \mid x_1\overline{x_2}) \rightarrow (\overline{x_2x_3}) \oplus (\overline{x_3x_2 \sim x_1x_4})$

5. Să se implementeze funcţia logică $f(x_1, x_2, x_3) = \sum(0,1,5,6,7)$ în baza lui Pierce şi în baza lui Sheffer.

6. Fie funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin FCD a sa:

   $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(0-2,6,7,11,15)$

   a) să se determine FCM după metoda lui Quine-McCluskey şi cu ajutorul diagramei Karnaugh;
   b) Să se determine FDM după metoda lui Quine, Quine-McCluskey şi cu ajutorul diagramei Karnaugh.

7. Pentru funcţia logică $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(1,2,5,6,8,9,12,13,14)$

   a) să se determine FDM şi FCM după metoda lui Quine-McCluskey;
   b) să se determine FDM şi FCM cu ajutorul diagramei Karnaugh;
   c) să se elaboreze schema logică în baza „ŞI-NU” şi în baza „SAU-NU”.
   d) să se reprezinte funcţia prin diagramă în timp.

2.3. INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI LA PROBLEMELE PROPUSE

1. a) adevărat; b) adevărat; c) adevărat; d) adevărat; e) fals; f) adevărat; g) fals; h) fals; i) fals.

2. a) $x \vee \overline{x}y$; b) $y \vee \overline{x}\,\overline{y}$; c) $x \vee \overline{x}\,\overline{y}$; d) $x\overline{z} \vee y$; e) $\overline{y}$; f) y; g) z; h) $x \vee y$; i) $cd\overline{a}$; j) ad; k) $\overline{b}da$; l) $\overline{a}d$.

3. a) $f(x,y,z) = \sum(2-7)$, $f(x,y,z) = \prod(0,1)$;

b) $f(x,y,z) = \sum(0,1,4,5)$, $f(x,y,z) = \prod(2,3,6,7)$;

c) $f(x,y,z) = \sum(2,3,4,6,7)$, $f(x,y,z) = \prod(0,1,5)$;

d) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(0-2,4,6,10-15)$,

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(3,5,7,8,9)$;

e) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(0,1,2,4,5,6,8,10,11,13)$,

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(3,7,9,12,14,15)$.

4. 0)

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(0,1,2,4,5,6,8,10,11,13)$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(3,7,9,12,14,15)$

FDM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4}$

FCM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4) \wedge$
$\wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$

1)

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(3,4,5,8-14)$, $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(0,1,2,6,7,15)$

FDM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_3x_4$

FCM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$

2)

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(0-5,8,10,12,14,15)$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(6,7,9,11,13)$

FDM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3$

FCM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}\right)$

3)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0,2-5,8,12,13,15\right)$

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(1,6,7,9,10,11,14\right)$

FDM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$

FCM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right) \wedge \left(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)$

4)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0-4,6,9-12,15\right)$

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(5,7,8,13,14\right)$

FDM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_1x_3x_4 \vee \overline{x_2}x_4$

FCM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4\right) \wedge$
$\wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$

5)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0-6,8,9,11,14,15\right)$

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(7,10,12,13\right)$

FDM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1x_3x_4$

FCM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4\right)$

6)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0,2,4,5,6,10\right)$

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(1,3,7,8,9,11-15\right)$

FDM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_3\overline{x_4}$

FCM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\right) \wedge \left(\overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}\right)$

7)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0,1,4,5,8,9,10,12,13,14\right)$

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(2,3,6,7,11,15\right)$

FDM: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_3} \vee x_1\overline{x_4}$

FCM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_3}\vee\overline{x_4})\wedge(x_1\vee\overline{x_3})$

8)

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum(0-4,6,10,11,13,14)$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod(5,7,8,9,12,15)$

FDM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_3\overline{x_4}\vee\overline{x_2}x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_4}\vee x_1x_2\overline{x_3}x_4$

FCM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_1}\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_4})\wedge(\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\vee\overline{x_4})\wedge(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})$

9)

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum(0-8,10,12,14)$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod(9,11,13,15)$

FDM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\vee\overline{x_4}$

FCM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\vee\overline{x_4}$

5. FDM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_1x_2\vee x_1x_3$

   FCM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\vee\overline{x_2})\wedge(\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3)$

6.

a) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_2}\vee x_3)\wedge(\overline{x_1}\vee x_3)\wedge(\overline{x_1}\vee x_4)\wedge(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3}\vee\overline{x_4})$

b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_3\overline{x_4}\vee x_2x_3x_4\vee x_1x_3x_4$

7. FDM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_3}x_4\vee x_1\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_3\overline{x_4}\vee x_2x_3\overline{x_4}$

sau

   FDM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_3}x_4\vee x_1\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_3\overline{x_4}\vee x_1x_2\overline{x_4}$

   FCM: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_3}\vee\overline{x_4})\wedge(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})\wedge(x_1\vee x_3\vee x_4)$

3. GRAFURI
Definiţia unui graf. Gradul unui vârf. Conexiunea într-un graf. Arbori. Drum elementar. Graf planar. Drum minim (maxim). Reţele de transport. Drum hamiltonian

3.1. PROBLEME REZOLVATE

1.Fie graful $G=(X,U)$ din figura 3.1. Să se găsească relaţiile care definesc aplicaţia multivocă U a mulţimii $X=\overline{\{1,6\}}$ în mulţimea X.

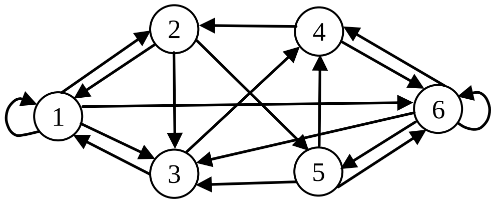


Fig.3.1

Rezolvare: Aplicaţia multivocă U a mulţimii X în mulţimea X este definită de relaţiile:

$$U_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6)\};\qquad U_4=\{(4,2),(4,6)\};$$
$$U_2=\{(2,1),(2,3),(2,5)\};\qquad U_5=\{(5,3),(5,4),(5,6)\};$$
$$U_3=\{(3,1),(3,4)\};\qquad U_6=\{(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

2. Să se demonstreze că orice graf neorientat G cu $n\geq 2$ vârfuri conţine cel puţin două vârfuri care au acelaşi grad.

Demonstraţie: Gradul unui vârf x este numărul muchiilor incidente cu x. Presupunem prin absurd că şirul gradelor vârfurilor lui G conţine n numere distincte două câte două. Dar cum pentru $x\in X,\ d(x)\in\{0,1,2,\ldots,n\text{-}1\}$, rezultă că şirul gradelor coincide cu şirul 0,1,2,…,n-1, abstracţie făcând de ordinea lor. Rezultă că există un vârf izolat şi unul adiacent cu toate celelalte, absurd.

3. Fiind dat un graf neorientat G=(X,Y), complementarul său G_1=(X,U_1) se defineşte ca fiind graful cu aceeaşi mulţime X de vărfuri, două vărfuri fiind adiacente în G_1 dacă şi numai dacă ele nu sunt adiacente în G. Să se demonstreze că dacă G nu este conex, atunci complementarul său G_1 este conex.

Demonstraţie: Fie $x,y \in X, x \neq y$. Demonstrăm că există $L_{x,y}$ în G_1. Dacă x şi y nu sunt adiacente în G_1, atunci ele sunt adiacente în G. Cum G nu este conex, rezultă că în G există o componentă conexă C care nu conţine vărfurile x şi y. Fie z un vârf din C. Urmează ca în G_1 există muchiile [x,z] şi [y,z], deci există $L_{x,y}$=[x,z,y]. În concluzie G_1 este conex.

4. Să se verifice că graful G din figura 3.2 este tare conex.

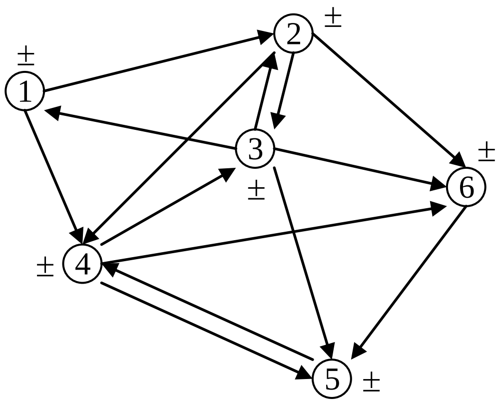


Fig.3.2

Rezolvare: Prin definiţie un graf orientat este tare conex, dacă pentru orice cuplu de vârfuri diferite i şi j ale grafului, există cel puţin un drum al grafului care pleacă de la vârful i la j . Pentru a stabili dacă graful G este sau nu tare conex, vom folosi următorul procedeu de marcaj: se ia un vârf arbitrar i şi-l marcăm cu semnele ±; dacă vârful j nu este marcat, vom marca cu +, dacă există arcul (i,j) şi cu -, dacă există arcul (j,i).

Folosind acest procedeu de marcaj, putem ajunge la una din situaţiile:

a) Orice vârf al grafului G a fost marcat cu $\pm$; în această situaţie, graful este tare conex.
b) Există cel puţin un vârf care nu este marcat cu $\pm$; în această situaţie graful nu este tare conex.

Pentru graful din figura 3.2, putem constata cu uşurinţă că orice vârf poate fi marcat cu $\pm$, deci graful este tare conex.

5. Fie $H=(X,Y)$ un arbore şi $H_1=(X_1,U_1)$, $H_2=(X_2,U_2)$ doi subarbori ai săi. Dacă $Y=X_1\cap X_2$, să se demonstreze că Y este mulţimea vârfurilor unui subarbore al lui H.

Demonstraţie: Deoarece H este arbore, rezultă că subgraful A indus de Y este fără cicluri. Mai trebuie să demonstrăm că el este conex. Fie x şi y două vârfuri din Y. În H_1 şi H_2 există lanţuri între x şi y. Fie lanţurile elementare care leagă cele două vârfuri în H_1, respectiv H_2. Ele sunt şi lanţuri elementare în H. Dar într-un arbore între două vârfuri există un lanţ elementar unic care le leagă, altfel s-ar forma un ciclu. Deci cele două lanţuri coincid, şi sunt prin urmare formate din vârfuri care aparţin ambelor mulţimi X_1 şi X_2. Am obţinut deci un lanţ format cu vârfuri din Y care leagă cele două vârfuri x şi y, deci am demonstrat conexitatea lui A.

6. Fie $D=(x,\ldots,y)$ un drum de la x la y ($x\neq y$) în graful orientat G. Să se arate că există un drum elementar de la x la y în G.

Demonstraţie: Fie k primul nod în D care se repetă deci $D=(x,\ldots,I,k,j,\ldots,q,k,p,\ldots,y)$; se consideră $D_1=(x,\ldots I,k,p,\ldots,y)$ obţinut din D prin eliminarea porţiunii de la prima apariţie a lui k (inclusiv) până la următoarea apariţie a lui k (exclusiv). Dacă drumul astfel obţinut este elementar ne oprim altfel aplicăm asupra lui D_1 acelaşi procedeu până când nu mai există noduri care se repetă.

7. Să se demonstreze că un graf neorientat G conţine o mulţime de cicluri elementare astfel încât fiecare muchie a lui G aparţine exact unuia din aceste cicluri elementare dacă şi numai dacă toate gradele vârfurilor lui G sunt numere pare.

Demonstraţie: Dacă gradele tuturor vârfurilor grafului G sunt numere pare, rezultă că fiecare componentă conexă care nu este formată doar dintr-un vârf izolat este un subgraf eulerian. Rezultă că fiecare muchie aparţine unui singur ciclu. Dar orice ciclu care nu este elementar se descompune în cicluri elementare. Invers, dacă fiecare muchie aparţine exact unui ciclu elementar, să observăm că apartenenţa unui vârf la un ciclu consumă două unităţi din gradul său. Rezultă că pentru $\forall x \in X$, $d(x)$ este număr par.

8. Să se demonstreze că în graful neorientat conex şi planar G cu n vârfuri şi m muchii, a cărui reprezentare planară are f feţe (inclusiv faţa de infinită) are loc *relaţia lui Euler:* n-m+f=2

Demonstraţie: Un graf se numeşte planar dacă el are o reprezentare în plan astfel încât muchiile lui nu se intersectează decât cel mult în vârfuri. Demonstrăm relaţia lui Euler prin inducţie după f. Pentru f=1, graful G fiind conex, deoarece f=1 (în reprezentarea planară există doar faţa infinită), rezultă că el nu are cicluri. Rezultă că G este arbore şi deci m=n-1. În acest caz relaţia se verifică: n-(n-1)+1=2. Presupunem relaţia adevărată pentru grafurile planare conexe cu f feţe ($f \geq 1$) şi s-o demonstrăm pentru grafurile planare conexe cu f+1 feţe. Fie G un graf planar conex cu f+1 feţe. Deoarece $f \geq 1$, rezultă că $f+1 \geq 2$ şi deci graful admite o reprezentare planară în care apare măcar o faţă diferită de cea infinită. Fie o muchie U ce aparţine frontierei unei asemenea feţe. Prin eliminarea muchiei u se obţine un graf conex, cu acelaşi număr de vârfuri, de asemenea planar, dar în care m_1=m-1 şi f_1=(f+1)-1=f. În el relaţia lui Euler este satisfacută, conform ipotezei inductive. Rezultă că: n-m_1+f_1=2. Înlocuind m_1 şi f_1 cu valorile lor, obţinem: n-(m-1)+f=2, adică: n-m+(f+1)=2, ceea ce voiam să demonstrăm. Din cele două etape ale inducţiei, rezultă că relaţia lui Euler este satisfacută în grafuri planare şi conexe.

9. Să se determine valoarea fluxului maxim care traversează reţeaua de ransport $R = (X, U)$ dată în figura 3.3.

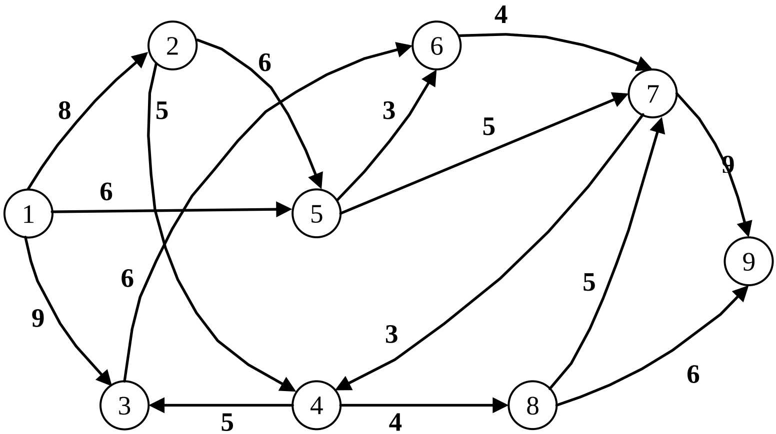


Fig. 3.3

Rezolvare:

Aplicăm algoritmul Ford-Fulkerson. Ideia algoritmului constă dintr-un procedeu de marcare a vârfurilor, pe baza căruia se îmbunătăţeşte succesiv valoarea fluxului pînă cînd se obţine un flux maximal.

I. Definim fluxul iniţial $f(u) = 0 \ \forall \ u \in U$.

II. Determinăm lanţurile nesăturate de la intrarea reţelei x_1 până la ieşirea reţelei x_9 prin următorul procedeu de marcare:

a) marcăm intrarea x_1 cu semnul "+";

b) marcăm cu semnul "$+x_i$" oricare vârf x_k nemarcat cu proprietatea că arcul $(x_i, x_k) \in U$ este nesaturat;

c) marcăm cu semnul "$-x_k$" oricare vârf x_i nemarcat cu proprietatea că arcul $(x_i, x_k) \in U$ are un flux nenul, adică $f(x_i, x_k) > 0$.

III. Determinăm cantitatea de flux ε, cu care mărim sau micşorăm fluxul pe fiecare arc din drumul (lanţul) ales:

$\varepsilon_1 = min(c(u) - f(u)),\ u \in U^+$, ($U^+$ - mulţimea arcelor, orientate de la intrare spre ieşire).

$\varepsilon_2 = \min\left(f\left(u\right)\right)$, $u \in U^-$, (U^- - mulţimea arcelor, orientate de la ieşire spre intrare).

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & dac\breve{a} \quad U^- = \phi \\ \min\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right), & dac\breve{a} \quad U^- \neq \phi \end{cases}$$

IV. Dacă $\varepsilon > 0$, definim un nou flux $f_1(u)$ astfel:

$$f_1(u) = \begin{cases} f(u), dac\breve{a} & u \notin l \\ f(u) + \varepsilon, dac\breve{a} & u \in U^+ \\ f(u) - \varepsilon, dac\breve{a} & u \in U^- \end{cases}$$

l - drumul(lanţul) ales.

V. Repetăm paşii II, III şi IV cu fluxul nou obţinut.

Dacă prin acest procedeu de marcare nu putem marca ieşirea reţelei, atunci fluxul are o valoare maximă la ieşire, iar mulţimea arcelor care unesc vârfurile marcate cu vârfurile care nu au putut fi marcate constituie o tăietură de capacitate minimă (secţiunea minimală).

În urma marcării vârfurilor obţinem următoarele lanţuri(drumuri):

l_1={1,2,5,6,7,9} ε_1=min(8,6,3,4,9)=3
l_2={1,2,5,7,9} ε_2=min(8-3,6-3,5,9-3)=3
l_3={1,2,4,8,7,9} ε_3=min(8-6,5,4,5,9-6)=2
l_4={1,5,7,9} ε_4=min(6,5-3,9-8)=1
l_5={1,3,6,7,4,8,9} ε_5=min(9,6,4-3,3,4-2,6)=1
l_6={1,5,7,4,8,9} ε_6=min(6-1,5-4,3-1,4-3,6-1)=1
l_7={1,5,2,4,7,8,9} ε_7=min(6-2,6,5-2,2,2,6-2)=2

Secţiunea minimală se obţine pentru A={7,8,9}(mulţimea vîrfurilor nemarcate)

$\omega^-(A) = \{(6,7),(5,7),(4,8)\}$ - tăietura de capacitate minimă.

$c\left(\omega^-(A)\right) = 4 + 5 + 4 = 13$ - capacitatea tăieturii.

Conform teoremei lui Ford-Fulkerson

$f_{\max} 9 = c\left(\omega^-(A)\right) = 13$ (fig. 3.4).

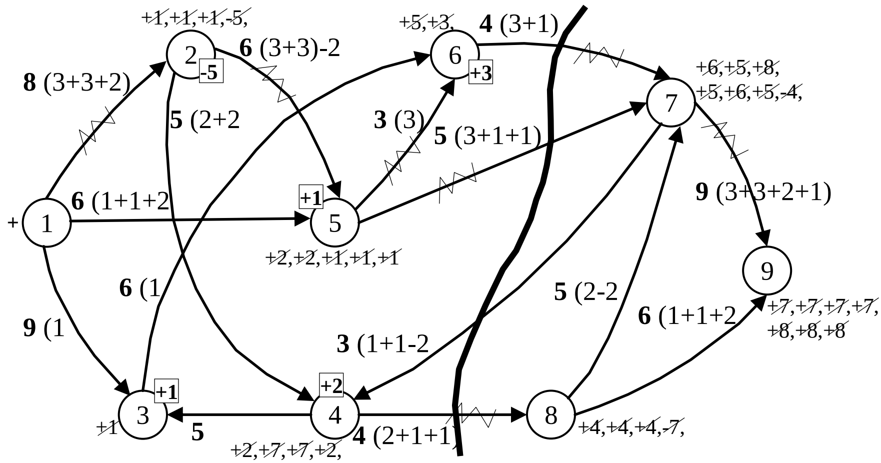


Fig. 3.4

10. Folosind algoritmul Ford-Fulkerson să se determine valoarea fluxului maxim care traversează reţeaua de transport dată în figura 3.5.

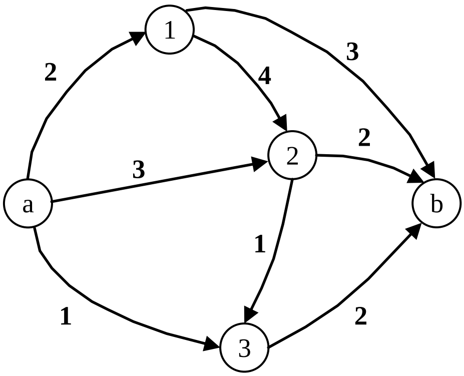


Fig. 3.5

Rezolvare:

I. Vom considera fluxul iniţial $f(u) = 0 \ \forall \ u \in U$.

II. Determinăm lanţurile nesăturate şi cantitatea de flux ε, cu care mărim sau micşorăm fluxul pe fiecare arc din drumul (lanţul) ales:

l_1={a,1,2,b} ε_1=min(2,4,2)=2

l_2={a,3,b} ε_2=min(1,2)=1

l_3={a,2,3,b} ε_3=min(3,1,2-1)=1

l_4={a,2,1,b} ε_4=min(3-1,2,3)=2

III. Determinăm mulţimea vîrfurilor nemarcate: A={1,2,3,b}

IV. Determinăm tăietura şi capacitatea tăieturii:

$\omega^-(A)=\{(a,1),(a,2),(a,3)\}$ $c(\omega^-(A))=2+3+1=6$

$f_{\max} b = c(\omega^-(A)) = 6$ (fig. 3.6)

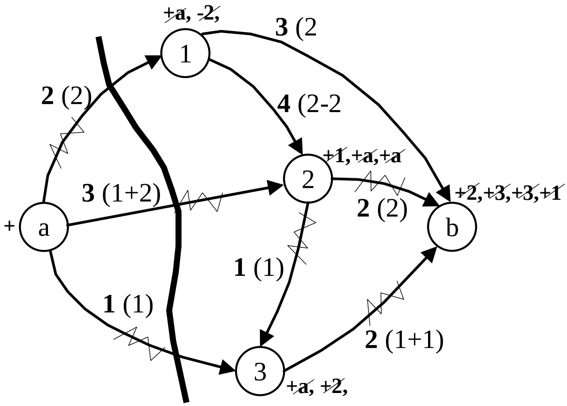


Fig. 3.6

11. Să se determine pentru graful din figura 3.7 drumul de valoare minimă între vârfurile x_1 şi x_7 conform algoritmului lui Ford.

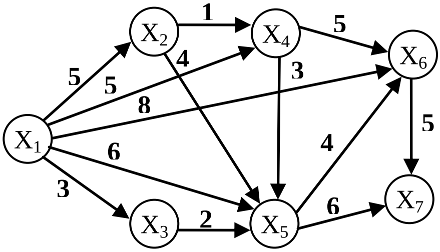


Fig.3.7

Algoritmul lui Ford permite determinarea drumului de valoare minimă de la un vârf fixat până la toate celelalte vârfuri ale grafului orientat dat.

I. Vârfului iniţial îi atribuim eticheta $H_0 = 0$.

II. La toate celelalte vârfuri le atribuim eticheta $H_j = \infty$. (∞ reprezintă lungimea unui drum arbitrar de la vârful x_i până la vârful x_j).

III. Calculăm diferenţele $H_j - H_i$ pentru fiecare arc (x_i, x_j) a grafului dat şi le comparăm cu ponderea arcului (x_i, x_j):

a) $H_j - H_i < L_{ij}$, L_{ij} - ponderea (lungimea) arcului (x_i, x_j)

b) $H_j - H_i > L_{ij}$

c) $H_j - H_i = L_{ij}$

Cazul c) permite micşorarea distanţei dintre vârful x_i şi x_j:

$$H_j = L_{ij} + H_i$$

Pasul III îl repetăm atât timp cât există arce pentru care are loc inegalitatea „c”. Etchitele H_i vor defini distanţa de la vârful x_i până la vârful x_j.

IV. Stabilim secvenţa de vârfuri care formează drumul minim. Plecăm de la vârful final x_j spre cel iniţial. Predecesorul lui x_j va fi considerat x_i, dacă are loc $H_j - H_i = L_{ij}$. Dacă există câteva arce, pentru care are loc această relaţie, alegem la opţiune.

Rezolvare:

I. $H_0 = 0$;

II. $H_j = \infty$;

III. Examinăm toate arcele care iese din vârful x_1:

$H_2 - H_1 > L_{12}$	$\infty - 0 > 5 \Rightarrow$	$H_2 = H_1 + L_{12} = 0 + 5 = 5$
$H_4 - H_1 > L_{14}$	$\infty - 0 > 5 \Rightarrow$	$H_4 = H_1 + L_{14} = 0 + 5 = 5$
$H_6 - H_1 > L_{16}$	$\infty - 0 > 8 \Rightarrow$	$H_6 = H_1 + L_{16} = 0 + 8 = 8$

H_5-H_1>L_{15} ∞-0>6 $\Rightarrow$ H_5=H_1+L_{15}=0+6=6
H_3-H_1>L_{13} ∞-0>3 $\Rightarrow$ H_3=H_1+L_{13}=0+3=3
(fig. 3.8)

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_2:

H_4-H_2<L_{24} 5-5<1 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_4 nu se schimbă.

H_5-H_2<L_{25} 6-5<4 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_5 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_3:

H_5-H_3>L_{35} 6-3>2 $\Rightarrow$ H_5=H_3+L_{35}=3+2=5

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_4:

H_5-H_4<L_{45} 5-5<3 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_5 nu se schimbă.

H_6-H_4<L_{46} 8-5<5 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_6 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_5:

H_6-H_5<L_{56} 8-5<4 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_6 nu se schimbă.

H_7-H_5>L_{57} ∞-5>6 $\Rightarrow$ H_7=H_5+L_{57}=5+6=11

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_6:

H_7-H_6<L_{67} 11-8<5 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_7 nu se schimbă.

Rezolvarea problemei poate fi scrisă cu ajutorul unui tabel (fig.3.8)

	1	2	3	4	5	6	7
I	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
II_1		5	3	5	6	8	∞
III_2							∞
IV_3					5		∞
V_4							∞
VI_5							11
VII_6							
	0	5	3	5	5	8	11

Fig.3.8

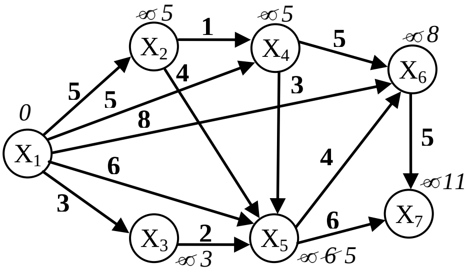


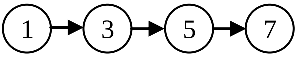
Fig.3.9

$l_{\min}(1-7)=11$

IV. Determinăm drumul minim: $H_7 - H_5 = L_{57}$, 11-5 = 6

$H_5 - H_3 = L_{35}$, 5-3 = 2

$H_3 - H_1 = L_{13}$, 3-0 = 3

Drumul corespunzător valorii minime 11: 

12. Folosind algoritmului lui Ford să se determine drumul de valoare maximă între vârfurile x_1 şi x_7 ale grafului din figura 3.6.

Rezolvare:

I. $H_0 = 0$;

II. $H_j = -\infty$;

III. Examinăm toate arcele care iese din vârful x_1:

$H_2-H_1<L_{12}$	$-\infty-0<5 \Rightarrow$	$H_2=H_1+L_{12}=0+5=5$
$H_4-H_1<L_{14}$	$-\infty-0<5 \Rightarrow$	$H_4=H_1+L_{14}=0+5=5$
$H_6-H_1<L_{16}$	$-\infty-0<8 \Rightarrow$	$H_6=H_1+L_{16}=0+8=8$
$H_5-H_1<L_{15}$	$-\infty-0<6 \Rightarrow$	$H_5=H_1+L_{15}=0+6=6$
$H_3-H_1<L_{13}$	$-\infty-0<3 \Rightarrow$	$H_3=H_1+L_{13}=0+3=3$

(fig. 3.10)

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_2:

$H_4-H_2<L_{24}$	$5-5<1 \Rightarrow$	$H_4=H_2+L_{24}=5+1=6$
$H_5-H_2<L_{25}$	$6-5<4 \Rightarrow$	$H_5=H_2+L_{25}=5+4=9$

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_3:

H_5-H_3>L_{35} 9-3>2 $\Rightarrow$ Eticheta la vîrful x_5 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_4:

H_5-H_4=L_{45} 9-6=3 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_5 nu se schimbă.

H_6-H_4<L_{46} 8-6<5 $\Rightarrow$ H_6=H_4+L_{46}=6+5=11

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_5:

H_6-H_5<L_{56} 11-9<4 $\Rightarrow$ H_6=H_5+L_{56}=9+4=13

H_7-H_5<L_{57} -∞-9<6 $\Rightarrow$ H_7=H_5+L_{57}=9+6=15

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_6:

H_7-H_6<L_{67} 15-13<5 $\Rightarrow$ H_7=H_6+L_{67}=13+5=18

	1	2	3	4	5	6	7
I	0	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞
II_1		5	3	5	6	8	-∞
III_2				6	9		-∞
IV_3							-∞
V_4						11	-∞
VI_5						13	15
VII_6							18

Fig.3.10

$l_{\max}(1-7)=18$

IV. Determinăm drumul maxim: $H_7 - H_6 = L_{67}$, 18-13 = 5

$H_6 - H_5 = L_{56}$, 13-9 = 4

$H_5 - H_4 = L_{45}$, 9-6 = 3

$H_5 - H_2 = L_{25}$, 9-5 = 4

$H_4 - H_2 = L_{24}$, 6-5 = 1

$H_2 - H_1 = L_{12}$, 5-0 = 5

Drumurile corespunzătoare valorii maxime 18:

$1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7$

$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$

13.Pentru graful din figura 3.6 să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile x_1 şi x_7 folosind algoritmul Bellman-Calaba.

Rezolvare:

Algoritmul Bellman-Calaba permite determinarea drumului de valoare minimă din fiecare vârf a grafului până la un vârf fixat, numit vârf final.

Etapa I. Construim matricea ponderată de adiacenţă a grafului dat *G=(X,U)*: (fig. 3.11)

a) $m_{ij} = L_{ij}$, dacă există arcul (x_i, x_j) de pondere L_{ij};

b) $m_{ij} = \infty$, unde ∞ este un număr foarte mare (de tip întreg maximal pentru calculatorul dat), dacă arcul (x_i, x_j) este lipsă; (∞ reprezintă lungimea unui drum arbitrar de la vârful x_i până la vârful x_j);

c) $m_{ij} = 0$, dacă $i = j$.

Etapa a II-a. Elaborăm un vector V_0 în felul următor:

a) $V_i^0 = L_{in}$, dacă există arcul (x_i, x_n), unde x_n este vârful final pentru care se caută drumul minim, L_{in} este ponderea acestui arc;

b) $V_i^0 = \infty$, dacă arcul (x_i, x_n) este lipsă;

c) $V_i^0 = 0$, dacă $i = n$.

Etapa a III-a. Calculăm iterativ vectorul *V* în conformitate cu următorul procedeu:

$V_{(i)}^k = \min\left\{L_{ij} + V_{(j)}^{k-1}\right\}$, unde $i = 1,2,...,n-1,\ j = 1,2,...,n; i \neq j$

$V_n^k = 0$.

Dacă $V^k = V^{k-1}$ - STOP.

Componenta cu numărul *i* a vectorului V_i^k cu valoarea diferită de zero ne va da valoarea minimă a drumului dintre vârfurile x_i şi x_n.

Etapa a IV-a. Determinăm drumul de la vârful x_i până la vârful x_n, care corespunde valorii minime:

$$V^k = L_{ij} + V^{k-1} \Rightarrow L_{ij} = V^k - V^{k-1}$$

$$V_{(1)}^1 = \min\{L_{12}+V_2^0, L_{13}+V_3^0, L_{14}+V_4^0, L_{15}+V_5^0, L_{16}+V_6^0, L_{17}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{5+\infty, 3+\infty, 5+\infty, 6+6, 8+5, \infty+0\} = 12$$
$$V_{(2)}^1 = \min\{L_{21}+V_1^0, L_{23}+V_3^0, L_{24}+V_4^0, L_{25}+V_5^0, L_{26}+V_6^0, L_{27}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, 1+\infty, 4+6, \infty+5, \infty+0\} = 10$$
$$V_{(3)}^1 = \min\{L_{31}+V_1^0, L_{32}+V_2^0, L_{34}+V_4^0, L_{35}+V_5^0, L_{36}+V_6^0, L_{37}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, 2+6, \infty+5, \infty+0\} = 8$$
$$V_{(4)}^1 = \min\{L_{41}+V_1^0, L_{42}+V_2^0, L_{43}+V_3^0, L_{45}+V_5^0, L_{46}+V_6^0, L_{47}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, 3+6, 5+5, \infty+0\} = 9$$
$$V_{(5)}^1 = \min\{L_{51}+V_1^0, L_{52}+V_2^0, L_{53}+V_3^0, L_{54}+V_4^0, L_{56}+V_6^0, L_{57}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, 4+5, 6+0\} = 6$$
$$V_{(6)}^1 = \min\{L_{61}+V_1^0, L_{62}+V_2^0, L_{63}+V_3^0, L_{64}+V_4^0, L_{65}+V_5^0, L_{67}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+6, 5+0\} = 5$$
$$V_{(1)}^2 = \min\{L_{12}+V_2^1, L_{13}+V_3^1, L_{14}+V_4^1, L_{15}+V_5^1, L_{16}+V_6^1, L_{17}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{5+10, 3+8, 5+9, 6+6, 8+5, \infty+0\} = 11$$
$$V_{(2)}^2 = \min\{L_{21}+V_1^1, L_{23}+V_3^1, L_{24}+V_4^1, L_{25}+V_5^1, L_{26}+V_6^1, L_{27}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+8, 1+9, 4+6, \infty+5, \infty+0\} = 10$$
$$V_{(3)}^2 = \min\{L_{31}+V_1^1, L_{32}+V_2^1, L_{34}+V_4^1, L_{35}+V_5^1, L_{36}+V_6^1, L_{37}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+10, \infty+9, 2+6, \infty+5, \infty+0\} = 8$$
$$V_{(4)}^2 = \min\{L_{41}+V_1^1, L_{42}+V_2^1, L_{43}+V_3^1, L_{45}+V_5^1, L_{46}+V_6^1, L_{47}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+10, \infty+8, 3+6, 5+5, \infty+0\} = 9$$
$$V_{(5)}^2 = \min\{L_{51}+V_1^1, L_{52}+V_2^1, L_{53}+V_3^1, L_{54}+V_4^1, L_{56}+V_6^1, L_{57}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+10, \infty+8, \infty+9, 4+5, 6+0\} = 6$$
$$V_{(6)}^2 = \min\{L_{61}+V_1^1, L_{62}+V_2^1, L_{63}+V_3^1, L_{64}+V_4^1, L_{65}+V_5^1, L_{67}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+10, \infty+8, \infty+9, \infty+6, 5+0\} = 5$$
$$V_{(1)}^3 = \min\{L_{12}+V_2^2, L_{13}+V_3^2, L_{14}+V_4^2, L_{15}+V_5^2, L_{16}+V_6^2, L_{17}+V_7^2\} =$$
$$= \min\{5+10, 3+8, 5+9, 6+6, 8+5, \infty+0\} = 11$$

$$V_{(2)}^3 = \min\left\{L_{21} + V_1^2, L_{23} + V_3^2, L_{24} + V_4^2, L_{25} + V_5^2, L_{26} + V_6^2, L_{27} + V_7^2\right\} =$$
$$= \min\{\infty + 11, \infty + 8, 1 + 9, 4 + 6, \infty + 5, \infty + 0\} = 10$$
$$V_{(3)}^3 = \min\left\{L_{31} + V_1^2, L_{32} + V_2^2, L_{34} + V_4^2, L_{35} + V_5^2, L_{36} + V_6^3, L_{37} + V_7^3\right\} =$$
$$= \min\{\infty + 11, \infty + 10, \infty + 9, 2 + 6, \infty + 5, \infty + 0\} = 8$$
$$V_{(4)}^3 = \min\left\{L_{41} + V_1^2, L_{42} + V_2^2, L_{43} + V_3^2, L_{45} + V_5^2, L_{46} + V_6^3, L_{47} + V_7^3\right\} =$$
$$= \min\{\infty + 11, \infty + 10, \infty + 8, 3 + 6, 5 + 5, \infty + 0\} = 9$$
$$V_{(5)}^3 = \min\left\{L_{51} + V_1^2, L_{52} + V_2^2, L_{53} + V_3^2, L_{54} + V_4^2, L_{56} + V_6^3, L_{57} + V_7^3\right\} =$$
$$= \min\{\infty + 11, \infty + 10, \infty + 8, \infty + 9, 4 + 5, 6 + 0\} = 6$$
$$V_{(6)}^3 = \min\left\{L_{61} + V_1^2, L_{62} + V_2^2, L_{63} + V_3^2, L_{64} + V_4^2, L_{65} + V_5^3, L_{67} + V_7^3\right\} =$$
$$= \min\{\infty + 11, \infty + 10, \infty + 8, \infty + 9, \infty + 6, 5 + 0\} = 5$$

Observăm că am ajuns la $V_i^3 = V_i^2$ - STOP (fig.3.11)

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	3	5	6	8	∞
2	∞	0	∞	1	4	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	3	5	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	4	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$V_{(i)}^0$	∞	∞	∞	∞	6	5	0
$V_{(i)}^1$	12	10	8	9	6	5	0
$V_{(i)}^2$	11	10	8	9	6	5	0
$V_{(i)}^3$	11	10	8	9	6	5	0

Fig. 3.11

$$l_{\min}(1-7) = 11$$

Determinăm drumul de valoare minimă:

$L_{13} = V_1 - V_3$ $\quad$ $L_{35} = V_3 - V_5$ $\quad$ $L_{57} = V_5 - V_7$

3 = 11 - 8 $\quad$ 2 = 8 – 6 $\quad$ 6 = 6 – 0

Drumul corespunzător valorii minime 11: $1 \rightarrow 3 \rightarrow \mathbf{5} \rightarrow 7$

14. Pentru graful din figura 3.6 să se determine drumul de valoare maximă între vârfurile x_1 şi x_7 folosind algoritmul Bellman-Calaba.

Rezolvare:

Etapa I. Construim matricea ponderată de adiacenţă a grafului dat *G=(X,U)*:

a) $m_{ij} = L_{ij}$, dacă există arcul (x_i, x_j) de pondere L_{ij};

b) $m_{ij} = -\infty$, dacă arcul (x_i, x_j) este lipsă;

c) $m_{ij} = 0$, dacă $i = j$.

Etapa a II-a. Elaborăm un vector V_0 în felul următor:

a) $V_i^0 = L_{in}$, dacă există arcul (x_i, x_n), unde x_n este vârful final pentru care se caută drumul maxim, L_{in} este ponderea acestui arc;

b) $V_i^0 = -\infty$, dacă arcul (x_i, x_n) este lipsă;

c) $V_i^0 = 0$, dacă $i = n$.

Etapa a III-a. Calculăm iterativ vectorul *V* în conformitate cu următorul procedeu:

$$V_{(i)}^k = \max\left\{L_{ij} + V_{(j)}^{k-1}\right\}, \quad \text{unde } i = 1,2,...,n-1,\ j = 1,2,...,n; i \neq j$$

$$V_n^k = 0.$$

Dacă $V^k = V^{k-1}$ - STOP (fig. 3.12)

Componenta cu numărul *i* a vectorului V_i^k cu valoarea diferită de zero ne va da valoarea maximă a drumului dintre vârfurile x_i şi x_n.

Etapa a IV-a. Determinăm drumul de la vârful x_i până la vârful x_n, care corespunde valorii maxime:

$$V^k = L_{ij} + V^{k-1} \Rightarrow L_{ij} = V^k - V^{k-1} \text{(fig. 3.12)}$$

$$l_{\max}(1-7) = 18$$

Determinăm drumul de valoare maximă:

$L_{12} = V_1 - V_2$	$L_{24} = V_2 - V_4$	$L_{25} = V_2 - V_5$	$L_{45} = V_4 - V_5$
5 = 18 - 13	1 = 13 – 12	4 = 13 – 9	3 = 12 – 9
$L_{56} = V_5 - V_6$	$L_{67} = V_6 - V_7$		
4 = 9 – 5	5 = 5 – 0		

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	3	5	6	8	$-\infty$
2	$-\infty$	0	$-\infty$	1	4	$-\infty$	$-\infty$
3	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	2	$-\infty$	$-\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	3	5	$-\infty$
5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	4	6
6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	5
7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$V_{(i)}^{0}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	6	5	0
$V_{(i)}^{1}$	13	10	8	10	9	5	0
$V_{(i)}^{2}$	15	13	11	12	9	5	0
$V_{(i)}^{3}$	18	13	11	12	9	5	0
$V_{(i)}^{4}$	18	13	11	12	9	5	0

Fig. 3.12

Drumurile corespunzătoare valorii maxime 18:

$$1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7$$

$$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$$

15. Pentru graful reprezentat în figura 3.13 să se determine drumul hamiltonian:

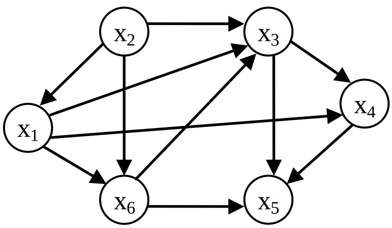


Fig. 3.13

Rezolvare:

Un drum care trece o singură dată prin fiecare vârf al său se numeşte *drum elementar*. Un drum elementar, ce trece prin toate vârfurile grafului, se numeşte *drum hamiltonian*.

Graful dat este orientat şi nu conţine circuite. Aplicăm următorul algoritm:

I. Construim matricea de adiacenţă a grafului dat $A_{n\times n} = \{a_{ij}\}$ (fig. 3.14):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	1	1	0	1
x_2	1	0	1	0	0	1
x_3	0	0	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0	1	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	1	0	1	0

Fig. 3.14

II. Determinăm matricea drumurilor $D_{n\times n} = \{d_{ij}\}$, unde

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă există drum din } x_i \text{ în } x_j \\ 0, \text{ în caz contrar} \end{cases} \quad \text{(fig. 3.15)}$$

Construirea unei linii i_d a matricii drumurilor:

a) dacă linia i din matricea de adiacenţă are elementele $a_{ip}, a_{ir}, ..., a_{iv}$ egale cu 1, atunci la elementele liniei i se adună boolean liniile $p, r, ..., v$ şi fie că elementele noi, egale cu 1, generate în linia i_d sunt $d_{i\alpha}, d_{i\beta}, ..., d_{i\lambda}$;

b) adunăm boolean liniile $\alpha, \beta, ..., \lambda$ ale matricii de adiacenţă la linia i_d, generând sau nu elemente noi în linia i;

c) repetăm pasul b) până vom ajunge la una din următoarele situaţii:

1) toate elementele liniei i sunt egale cu 1;

2) nu se mai pot genera alte elemente diferite de 0 în linia i şi se completează locurile rămase cu 0.

Repetăm punctele a), b) şi c) pentru toate liniile matricei de adiacenţă şi astfel obţinem matricea drumurilor (fig. 3.15).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$P(x_i)$
x_1	0	0	1	1	1	1	4
x_2	1	0	1	1	1	1	5
x_3	0	0	0	1	1	0	2
x_4	0	0	0	0	1	0	1
x_5	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	1	1	1	0	3

Fig.3.15

III. Calculăm puterile de atingere a vârfurilor, calculând sumele elementelor liniilor matricei drumurilor. Numim putere de atingere a unui vîrf x_i numărul de vîrfuri, care pot fi atinse din x_i. Calculăm suma puterilor de atingere a vîrfurilor $\sum p(x_i)$:

$$\sum P(x_i) = 4+5+2+1+0+3=15$$

IV. Comparăm $\sum P(x_i)$ cu n $\frac{n(n-1)}{2}$ (*n* – numărul de vârfuri). Dacă sunt egale, atunci $\exists$ drum hamiltonian:

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{6(6-1)}{2}=15 \Rightarrow \exists \text{ drum hamiltonian}$$

V. Scriem succesiunea de vârfuri în ordinea de descreştere a puterilor vîrfurilor, acesta fiind drumul hamiltonian în graful dat:

$$x_2 \to x_1 \to x_6 \to x_3 \to x_4 \to x_5$$

16. Un graf orientat şi fără circuite nu poate avea decît un singur drum hamiltonian.

Rezolvare: Singura succesiune a vârfurilor $x_1', x_2', ..., x_N'$ ce conduce la un drum hamiltonian este de forma

$$(x_1', x_2'), (x_2', x_3'), ..., (x_{N-1}', x_N').$$

În adevăr, orice altă succesiune a tuturor vârfurilor conţine cel puţin o inversiune a indicilor, căci dacă presupunem că mai există un drum hamiltonian atunci succesiunea de vârfuri corespunzătoare conţine cel puţin un arc de forma $\left(x_i^{'}, x_j^{'}\right)$ cu $j < i$. De aici, linia $x_j^{'}$ precede linia $x_i^{'}$ în $T^{'}$, deci $t_{ij}^{'} = 1$, adică există cel puţin un drum de la $x_j^{'}$ la $x_i^{'}$ ceea ce este incompatibil cu existenţa în graf a arcului $\left(x_i^{'}, x_j^{'}\right)$, cu care ar forma un circuit.

17. Să se determine pentru graful din figura 3.16 drumurile hamiltoniene.

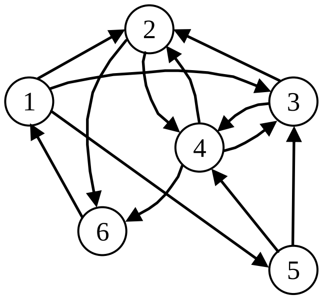


Fig.3.16

Rezolvare:

Graful dat este orientat şi conţine circuite. Aplicăm *algoritmul lui Kaufman*, care permite determinarea drumurilor de orice lungime ale unui graf orientat (cu sau fără circuite), în particular şi drumurile hamiltoniene (dacă ele există):

I. Scriem matricea latină L corespunzătoare grafului dat (fig.3.17):

$L =$

1	2	3	4	5	6	
0	12	13	0	15	0	1
0	0	0	24	0	26	2
0	32	0	34	0	0	3
0	42	43	0	0	46	4
0	0	53	54	0	0	5
61	0	0	0	0	0	6

Fig.3.17

II. Din matricea L obţinem matricea L^*, dacă vom suprima din fiecare căsuţă vârful iniţial ce aparţine arcului înscris în ea (fig.3.18):

$L^* =$

1	2	3	4	5	6	
0	2	3	0	5	0	1
0	0	0	4	0	6	2
0	2	0	4	0	0	3
0	2	3	0	0	6	4
0	0	3	4	0	0	5
1	0	0	0	0	0	6

Fig.3.18

III. Facem produsul latin (*l.*) dintre matricea L şi L^* şi obţinem matricea L^2, ale cărei elemente se obţin după regulile folosite la înmulţirea matricelor, la care se mai adaugă:

1) elementele matricei produs sunt 0 dacă cel puţin o căsuţă corespunzătoare conţine 0 sau dacă nu se poate face o secvenţă de litere distincte;

2) se vor trece în rest toate secvenţele distincte care apar cînd se efectuează produsul;

$$L^2 = L(l.)L^* \text{ (fig. 3.19)}$$

1	2	3	4	5	6	
0	132	153	124,134,154	0	126	1
261	0	243	0	0	246	2
0	342	0	324	0	326,346	3
461	432	0	0	0	426	4
0	532,542	543	534	0	546	5
0	612	613	0	615	0	6

Fig.3.19

Elementele matricei L^2 reprezintă toate drumurile elementare de lungime 2.

IV. $L^3 = L^2(l.)L^*$ (fig. 3.20)

1	2	3	4	5	6	
0	1532 1342 1542	1243 1543	1324 1534	0	1326,1246 1346,1546	1
2461	0	2613	0	2615	0	2
3261 3461	0	0	0	0	3426 3246	3
4261	4612	4613	0	4615	4326	4
5461	5432 5342	0	5324	0	5326 5426 5346	5
0	6132	6153	6124 6134 6154	0	0	6

Fig.3.20

Elementele matricei L^3 reprezintă toate drumurile elementare de lungime 3.

IV. $L^4 = L^3(l.)L^*$ (fig. 3.21)

1	2	3	4	5	6	
0	15432 15342	0	15324	0	15326,13426 15426,13246 15346	1
0	0	24613 26153	26134 26154	24615	0	2
34261 32461	34612	0	0	32615 34615	0	3
43261	46132	42613 46153	0	42615	0	4
53261 54261 53461	54612	54613	0	0	54326 53426 53246	5
0	61532 61342 61542	61243 61543	61324 61534	0	0	6

Fig.3.21

Elementele matricei L^4 reprezintă toate drumurile elementare de lungime 4.

IV. Drumurile elementare de lungime 5, care în cazul grafului dat sînt drumuri hamiltoniene, sint date de elementele matricei $L^5 = L^4(l.)L^*$ (fig. 3.22)

1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	154326 153426 153246	1
0	0	261543 246153	261534	0	0	2
0	0	0	326154	342615 324615	0	3
0	461532	426153	0	432615	0	4
543261 534261 532461	534612 546132	542613	0	0	0	5
0	615432 615342	0	615324	0	0	6

Fig.3.22

18. Desenaţi graful relaţiei reflexive $a \geq b$, unde $a, b \in M = \{1,2,3\}$.

Rezolvare: (fig. 3.23).

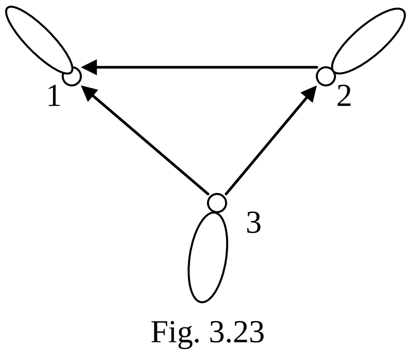


Fig. 3.23

19. Pe mulţimea $M = \{1,2,3\}$ se defineşte relaţia R=*”mai mic”*. Scrieţi elementele mulţimii R. Stabiliţi proprietăţile relaţiei R. Desenaţi graful.

Rezolvare: $R = \{(1,2);(1,3);(2,3)\}$, (fig.3.24).

Relaţia dată este:

1. antireflexivă, deoarece nu există $a \in M$, pentru care ar avea loc aRa, de exemplu 1 nu este mai mic decît 1;

2. nu este simetrică, deoarece nu există pereci $(a,b) \in M^2$, pentru care ar avea loc: din $aRb \Rightarrow bRa$, de exemplu din $1R2$ nu rezultă $2R1$;

3. tranzitivă, deoarece din aRb şi $bRc \Rightarrow aRc$, de exemplu din $1R2$ şi $2R3 \Rightarrow 1R3$.

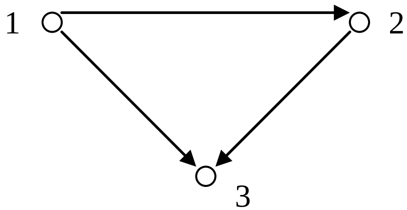


Fig. 3.24

3.2. PROBLEME PROPUSE

1. Fie graful $G = (X, U)$ din figura 3.25. Să se găsească relaţiile care definesc aplicaţia multivocă U a mulţimii $X = \overline{\{1,7\}}$ în mulţimea X.

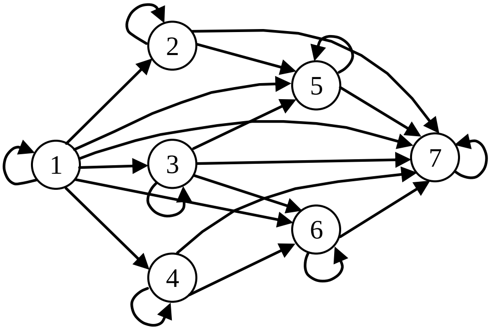


Fig.3.25

2. Să se arate că un graf neorientat cu *n* vârfuri şi cel puţin *n* muchii conţine cel puţin un ciclu.

3. Să se cerceteze dacă există un graf neorientat cu 10 vârfuri pentru care şirul gradelor vârfurilor sale este respectv:

1,1,1,3,3,3,4,6,7,9.

4. Fiind dată matricea de adiacenţă a unui graf orientat, cum putem deduce:

a) care sunt gradele vârfurilor;

b) dacă există vârfuri izolate;

c) dacă graful este complet.

5. Să se arate că dacă graful orientat G cu mulţimea de vârfuri X are m arce, au loc egalităţile:

$$\sum_{x \in X} d^{-}(x) = \sum_{x \in X} d^{+}(x) = m$$

6. Folosind procedeul de marcaj, să se verifice că graful din figura 3.26 este tare conex, iar graful din figura 3.27 nu este tare conex.

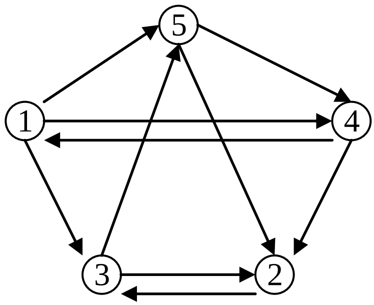


Fig. 3.26

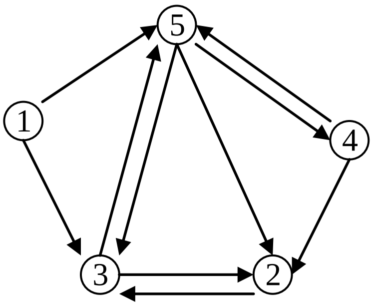


Fig. 3.27

7. Folosind algoritmul Bellman-Calaba, să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile 1 şi 8 ale grafului dat în figura 3.28.

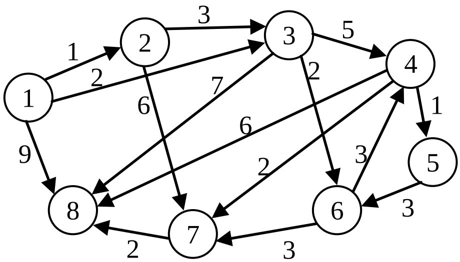


Fig.3.28

8. Desenaţi un graf cu şase vârfuri, care corespunde relaţiei:

a) reflexive;

b) antireflexive.

9. Pe mulţimea $M=\{2,3,4,7\}$ se defineşte relaţia $R=$*"mai mare"*. Scrieţi elementele mulţimii R. Stabiliţi proprietăţile relaţiei R. Desenaţi graful.

10. Fie M – mulţimea copiilor unor părinţi: {Iurie, Victor, Diana}. Pe mulţimea M se defineşte relaţia $R=$" este frate". Scrieţi elementele mulţimii R. Stabiliţi proprietăţile relaţiei R. Desenaţi graful.

11. Pentru graful reprezentat în figura 3.29 se cere să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile 0 şi 9, folosind:

a) algoritmul Belman-Calaba;

b) algoritmul Ford.

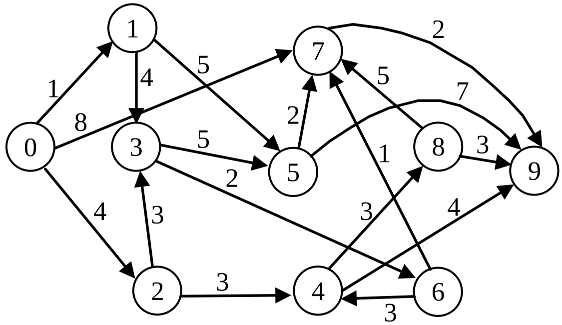


Fig.3.29

12. Folosind algoritmul Bellman-Calaba, să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile 1 şi 8 ale grafului dat în figura 3.30.

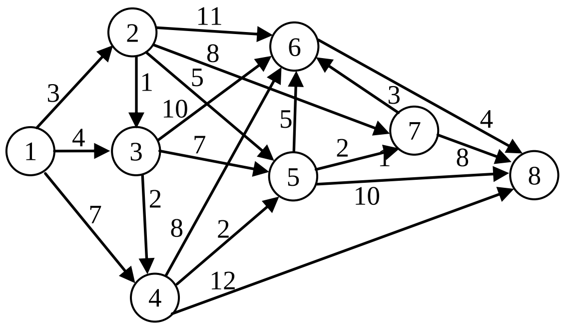


Fig.3.30

13. Folosind algoritmul Ford, să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile 1 şi 7 ale grafului reprezentat în figura 3.31.

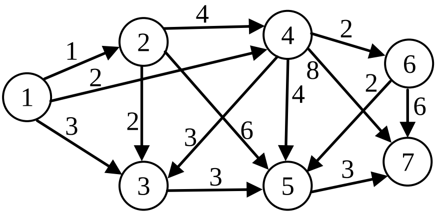


Fig.3.31

14. Reţeaua din figura 3.32 reprezintă un sistem de comunicare a datelor cu privire la informaţiile asupra necesarului de materiale dintr-o întreprindere industrială. Să se determine ruta optimă care stabileşte timpul optim de transmitere a informaţiei, dintre vârfurile 0 şi 7.

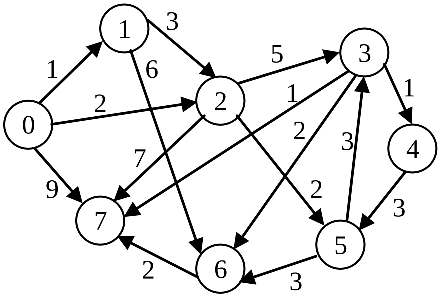


Fig.3.32

15. O reţea telefonică ce se construieşte între localitţile 0 şi 7 trebuie să treacă prin unele din localitţile 1, 2, ..., 6, localităţi în care se instalează o reţea telefonică internă, cu posibilităţi de a se extinde şi pentru alte localităţi. Costurile instalaţiilor între localităţi, inclusiv instalaţia punctelor de racordare, sunt trecute în graful din figura 3.33, pe arcele (*i*,*j*) corespunzătoare.

Se cere să se determine schema instalaţiei reţelei telefonice care trece printr-un număr cît mai mare de localităţi, iar costul instalaţiei să fie minim.

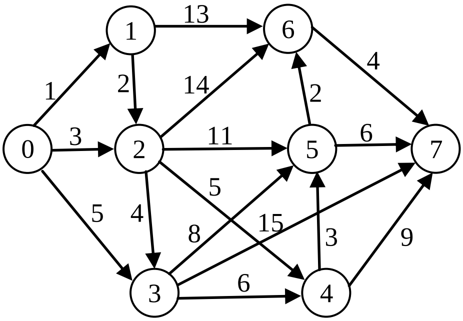


Fig.3.33

16. Fie graful din figura 3.34. Să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile 1 şi 8, folosind:

a) algoritmul Ford;

b) algoritmul Bellman-Calaba.

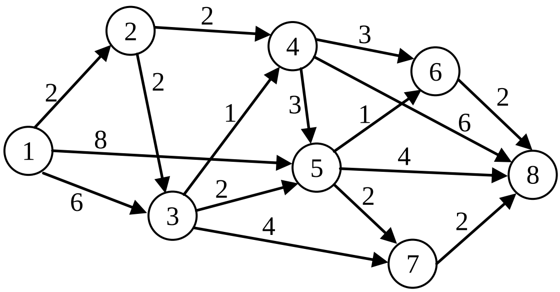


Fig.3.34

17. Pentru graful G dat în figura 3.35 să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile 0 şi 5, folosind:

a) algoritmul Ford;

b) algoritmul Bellman-Calaba.

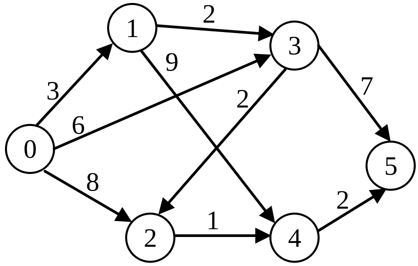


Fig.3.35

18. Să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile 1 şi 9 ale grafului dat în figura 3.36, folosind:

a) algoritmul Ford;

b) algoritmul Bellman-Calaba.

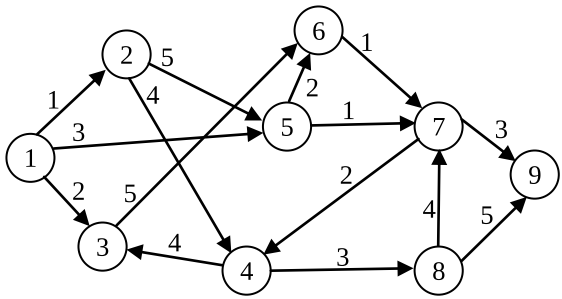


Fig.3.36

19. Dintr-o hartă a unui judeţ, întreprinderea judeţeană de drumuri şi poduri şi-a extras o configuraţie cuprinzînd 9 localităţi: 0, 1,..., 8 (fig. 3.37) şi şoselele intermediare dintre aceste localităţi.

În vederea construirii unei şosele asfaltate dintre localităţile 0 şi 8 s-a făcut un studiu (luînd în consideraţie distanţa dintre localităţi, numărul podurilor ce vor trebui să se construiască, cheltuielile de organizare cu materiale de construcţii etc.), în urma căruia s-a stabilit un preţ informativ mediu (în aceleaşi unităţi băneşti) pentru fiecare şosea intermediară, preţ ce este trecut în graful dat pe fiecare arc (*i*,*j*).

Se cere să se întocmească un proiect pentru asfaltarea unei şosele între localităţile 0 şi 8, astfel încît cheltuielile necesare să fie minime şi, în plus, dacă este posibil, şoseaua să treacă prin centrul industrial aflat în localitatea 5, în cazul cînd ar exista mai multe rute pentru care costul total este acelaşi, în funcţie de dezvoltarea în continuare a acestui judeţ, există vreo rută pentru care se manifestă un interes mai mare?

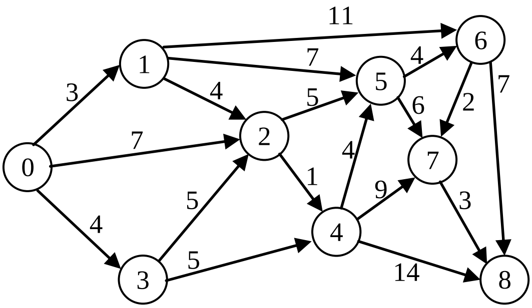


Fig.3.37

20. Să presupunem că din localitatea 0, este solicitat de urgenţă un produs de către o secţie a unei întreprinderi din localitatea 6. Presupunînd că pentru transportul produsului se poate folosi sistemul de linii ferate din figura 3.38, unde a fost indicat pentru fiecare porţiune de cale ferată timpul necesar de deplasare de la o localitate la alta, să se determine ruta care trebuie să se aleagă între cele două localităţi, astfel încît timpul necesar deplasării între localităţile menţionate să fie minim.

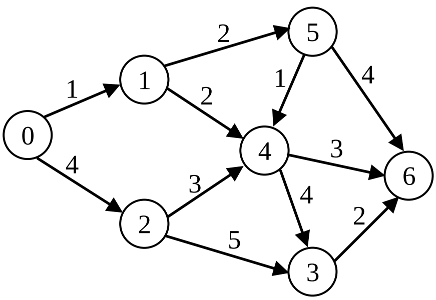


Fig.3.38

21. Fie graful din figura 3.39. Să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile 0 şi 12, folosind:

a) algoritmul Ford;

b) algoritmul Bellman-Calaba.

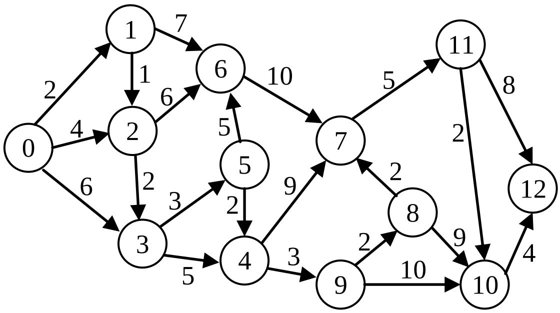


Fig.3.39

22. Folosind algoritmul lui Ford, să se determine drumul de valoare maximă între vârfurile 1 şi 7 ale grafului dat în figura 3.40.

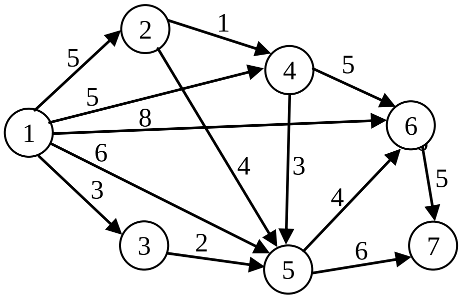


Fig.3.40

23. Să se determine drumul de valoare maximă între vârfurile 0 şi 6 ale grafului din figura 3.41, folosind:

a) algoritmul Ford;

b) algoritmul Bellman-Calaba.

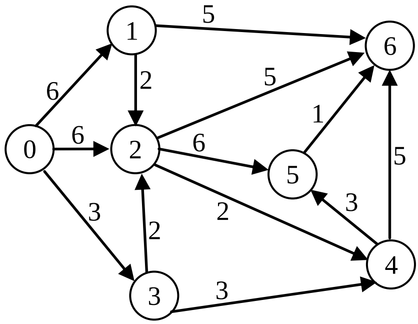


Fig.3.41

24. Pentru graful reprezentat în figura 3.42 se cere să se determine drumul de valoare maximă între vârfurile 0 şi 8, folosind:

a) algoritmul Ford;

b) algoritmul Bellman-Calaba .

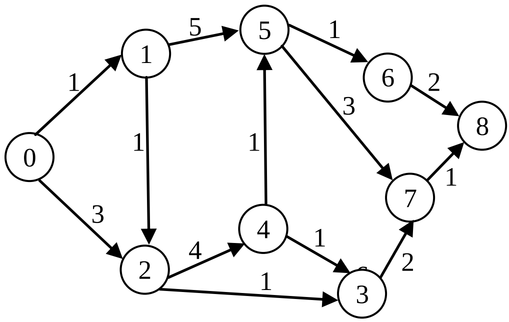


Fig.3.42

25. Graful din figura 3.43 reprezintă o reţea de transport a materiei prime pentru o uzină de aluminiu ce se găseşte în punctul 7. Beneficiul maxim calculat, obţinut în urma alegerii unei linii oarecare de transport (în funcţie de numărul staţiilor de încărcare existente pe fiecare linie, sau de procentul de steril care diferă de la o staţie la alta etc.), este trecut pe fiecare arc al grafului.

Ştiind că mijloacele de transport folosite pentru transportul materiei prime sunt garate în punctul 0, se cere să se determine rutele pentru care beneficiul obţinut este maxim.

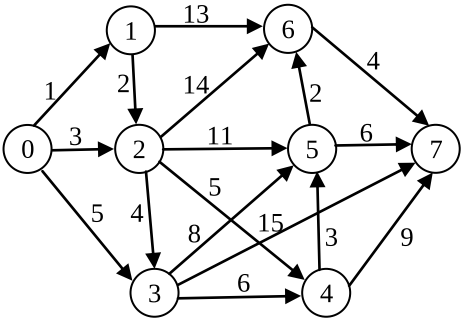


Fig.3.43

26. Un jucător de tenis, care participă la cîştigarea titlului de cel mai bun jucător de tenis al anului trebuie să participe la un număr de turnee de tenis de diferite categorii cotate fiecare cu cîte un număr diferit de puncte. Posibilitatea de a participa după un turneu din localitatea "*k*" la un alt turneu din localitatea "*j*" este indicată prin graful din figura 3.44; un turneu cîştigat în localitatea *j* adaugă la punctajul general un număr de puncte indicat printr-un număr ataşat vârfului *j*. Se cere să se afle numărul şi ordinea turneelor care trebuie să fie cîştigate de jucător, pentru a obţine un punctaj general maxim; participarea la turneul organizat în localitatea 8 este obligatorie.

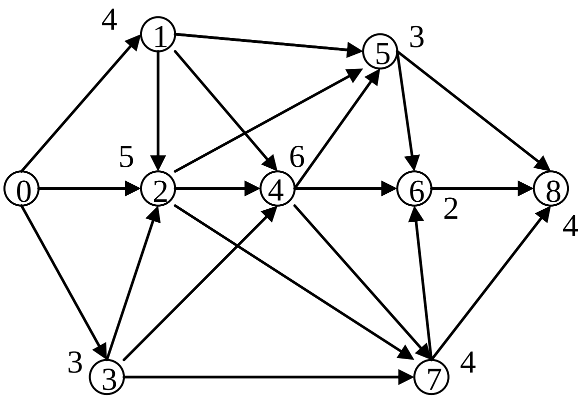


Fig. 3.44

27. Folosind algoritmul Ford-Fulkerson să se determine valoarea fluxului maxim care traversează reţeaua de transport dată în figura 3.45.

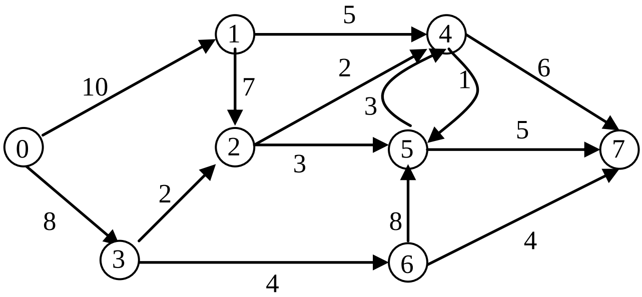


Fig.3.45

28. În portul 0 se găsesc 35 de vapoare ce trebuie să se deplaseze în portul 9. Deplasarea celor 35 de vapoare dintr-un port în altul se face în etape, astfel încît în prima etapă trebuie să ajungă cît mai multe dintre ele în portul 9; în drumul lor, vapoarele trebuie să mai facă cîte o escală în alte porturi intermediare 2,3,…,8 (fig. 3.46). Condiţiile de primire, aprovizionare etc. fac să existe o limitare a rutelor folosite; capacităţile existente sunt trecute pe arcele reţelei.

Să se determine un plan optim de transport, astfel încît, în această etapă să poată pleca cît mai multe vapoare spre portul 9.

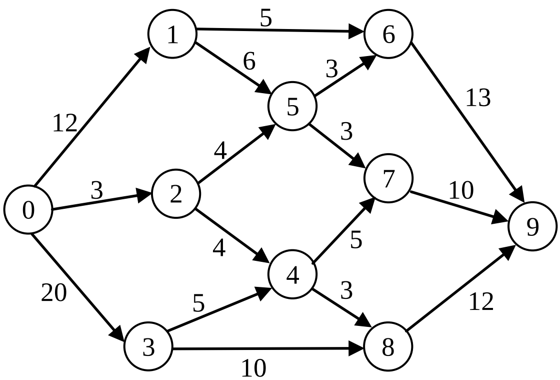


Fig.3.46

29. Folosind algoritmul Ford-Fulkerson să se determine valoarea fluxului maxim care traversează reţeaua de transport dată în figura 3.47.

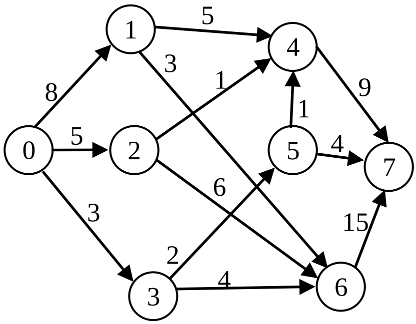


Fig.3.47

30. Folosind algoritmul Ford-Fulkerson să se determine valoarea fluxului maxim care traversează reţeaua de transport dată în figura 3.48.

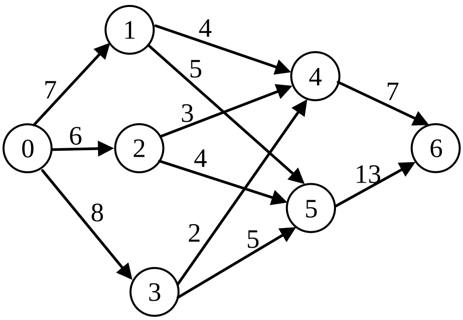


Fig.3.48

31. Între 11 puncte ale unei ferme agricole, există o reţea de canale reprezentată în figura 3.49, unde pe fiecare arc este trecut debitul maxim ce poate străbate canalul corespunzător.

Ştiind că apa porneşte din punctul 0 şi în punctul 10 există un lot care are cea mai mare nevoie de apă, se cere să determine modul în care trebuie folosită reţeaua de canale, astfel încît, în punctul 10 să ajungă un debit maxim de apă.

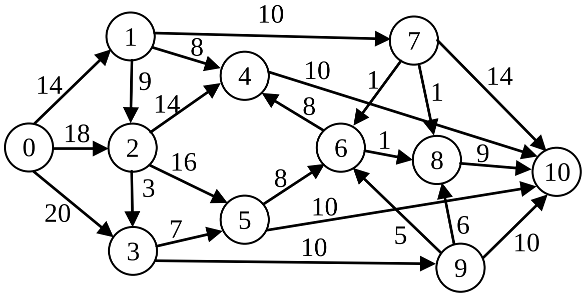


Fig.3.49

32. Fie 5 produse $P_i \quad (i = \overline{1,5})$, care vor trebui prelucrate corespunzător unei relaţii de ordine stabilite datorită necesităţilor producţiei. Relaţiile de ordine sînt următoarele:

- produsul P_2 precede produsele P_1, P_4 şi P_5;
- produsul P_3 precede produsele P_2, P_4;
- produsul P_4 precede produsele P_1, P_5;
- produsul P_5 precede produsul P_1 ;

Se cere să se cerceteze dacă e posibilă prelucrarea produselor ţinînd cont de relaţiile de ordine stabilite; dacă acest lucru este posibil, se cere să se determine succesiunea în care se poate face prelucrarea.

33. Pentru graful reprezentat în figura 3.50 să se determine drumurile hamiltoniene.

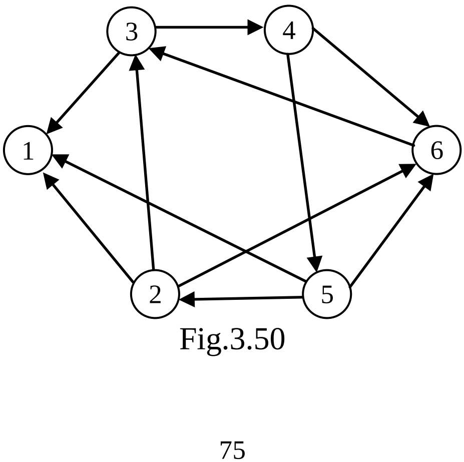


Fig.3.50

34. Prelucrarea unui produs oarecare impune să treacă prin 6 secţii folosind benzile de transport existente între aceste secţii benzi ce sunt reprezentate prin arcele grafului din figura 3.51.

Presupunînd că nu există o ordine preferenţială în prelucrarea produsului în cele 6 secţii, să se cerceteze dacă sistemul de benzi existente poate asigura transportul produsului prin cele 6 secţii existente; dacă acest lucru nu se poate realiza, care este numărul minim de benzi ce vor trebui construite, astfel încît problema transportului în cele 6 secţii să fie posibilă.

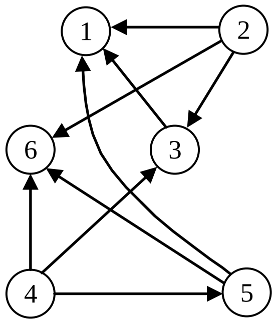


Fig.3.51

35. Pentru graful reprezentat în figura 3.52, să se arate că nu există un drum hamiltonian; să se găsească un număr minim de arce ce vor trebui adăugate, astfel încît, să existe în graful dat un drum hamiltonian.

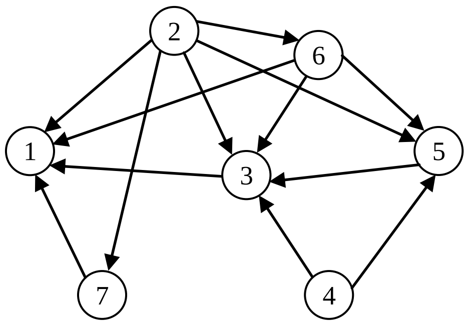


Fig.3.52

36. Fie graful reprezentat în figura 3.53. Folosind înmulţirea latină, să se determine circuitele hamiltoniene ale grafului dat.

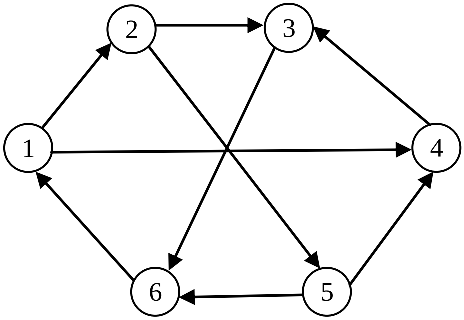


Fig.3.53

37. Folosind înmulţirea latină, să se determine drumul hamiltonian pentru graful reprezentat în figura 3.54.

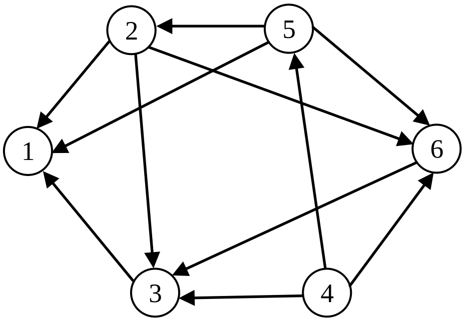


Fig.3.54

38. Să se determine drumul hamiltonian în graful $G=(X,U)$, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$
$U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_4),(x_2,x_3),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_5,x_1),$
$(x_6,x_3),(x_6,x_5)\}$

39. Să se determine drumurile hamiltoniene în graful $G=(X,U)$, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_3)\}$

40. Să se determine drumul hamiltonian în graful $G = (X, U)$,
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
$U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_5, x_3), (x_5, x_6), (x_6, x_3), (x_6, x_4)\}$

41. Să se determine drumurile hamiltoniene pentru graful reprezentat în figura 3.55.

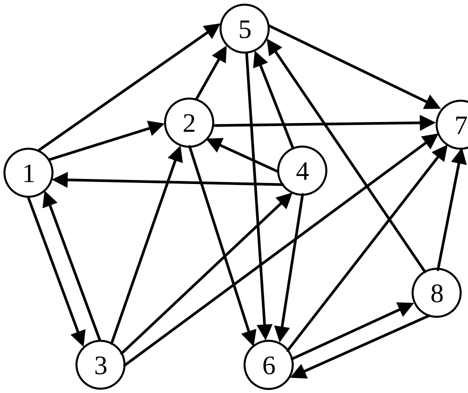


Fig. 3.55

3.3. INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI LA PROBLEMELE PROPUSE

1. Avem
$U_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7)\}$;
$U_2 = \{(2,2),(2,5),(2,7)\}$; $U_5 = \{(5,5),(5,7)\}$;
$U_3 = \{(3,5),(3,6),(3,7)\}$; $U_6 = \{(6,6),(6,7)\}$;
$U_4 = \{(4,4),(4,6),(4,7)\}$; $U_7 = \{(7,7)\}$.

2. Numărul maxim de muchii existente într-un graf cu *n* vârfuri şi fără cicluri este *n* -1. Dacă graful are cel puţin *n* muchii, proprietatea de a fi fără cicluri dispare.

3. Dacă răspunsul ar fi afirmativ, atunci vârful 10 este adiacent cu toate celelalte, deci şi cu 7. Din cauză că vârfurile 1,2 şi 3 au gradul 1, rezultă că vârful 9 mai poate fi adiacent cu 10-3-1 = 6 vârfuri, absurd, pentru că $d(9) = 7$.

4. a) Suma elementelor de pe linia *i* reprezintă gradul exterior al lui x_i iar suma elementelor de pe coloana *i* reprezintă gradul interior al lui x_i.

b) Un vârf x_i este izolat dacă şi numai dacă linia *i* şi coloana *i* a matricii de adiacenţă au toate elementele nule.

c) Pentru orice pereche (i, j) cu $i \neq j$ măcar unul din elementele $a[i, j]$, $a[j,i]$ este egal cu 1.

5. Fiecare arc (x, y) este numărat o dată şi numai o dată în $d^+(x)$ şi o dată şi numai o dată în $d^-(y)$.

7. Se găsesc drumurile: (1,2,7,8), (1,3,6,7,8), (1,3,8) şi (1,8) a căror valoare este 9.

10. (fig.3.56).
$R = \{(Iurie, Victor),(Iurie, Diana),(Victor, Iurie),(Victor, Diana)\}$,
Relaţia dată este:

1. antireflexivă, deoarece nu există $a \in M$, pentru care ar avea loc aRa, de exemplu Iurie nu este frate lui Iurie;

2. nu este simetrică, deoarece nu $\forall\ (a,b)\in M^2$ din aRb nu rezultă bRa, de exemplu din *Iurie R Diana* nu rezultă *Diana R Iurie*;

3. nu este tranzitivă, deoarece din *aRb* şi *bRc* *nu rezultă* $aRc\,\forall\ (a,b)$ şi (b,c) din *R*, de exemplu din *Iurie R Victor* şi *VictorRIurie* nu rezultă *IurieRIurie*.

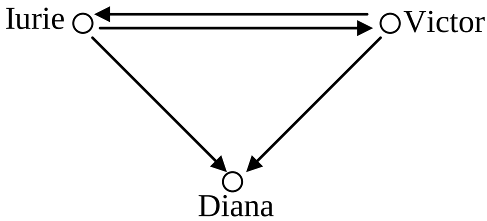


Fig. 3.56

11. Valoarea minimă 10, este atinsă pe drumul: (0,1,3,6,7,9).

12. Drumurile corespunzătoare valorii minime 17, sunt: (1,2,3,4,5,6,8), (1,2,5,6,8), (1,3,4,5,6,8).

13. Se găsesc drumurile: (1,4,5,7), (1,3,5,7), (1,2,3,5,7), (1,4,6,5,7), a căror valoare este 9.

14. Ruta optimă care stabileşte timpul optim de transmitere a informaţiei, dintre vârfurile 0 şi 7, este dată de drumul de valoare minimă între vârfurile 0 şi 7 ale grafului ce reprezintă sistemul de comunicare a datelor informaţiilor. Drumurile de valoare minimă 8 care dau rutele optime, sunt (0,2,5,3,7) şi (0,2,3,7).

15. Determinarea schemei instalaţiei reţelei telefonice de cost minim se reduce la determinarea drumului de valoare minimă între vârfurile 0 şi 7 din graful dat. Drumurile de valoare minimă 17 sunt: (0,1,2,4,5,6,7), (0,2,4,5,6,7), (0,1,2,4,5,7), (0,2,4,5,7), (0,1,2,4,7), (0,2,4,7). Dintre toate aceste drumuri de aceeaşi valoare, drumul (0,1,2,4,5,6,7) determină schema instalaţiei reţelei telefonice care trece prin numărul cel mai mare de localităţi.

16. Drumurile corespunzătoare valorii minime 9, sunt: (1,2,4,6,8), (1,2,3,5,6,8).

17. Drumul corespunzător valorii minime 10: (0,1,3,2,4,5).

18. Drumul corespunzător valorii minime 7: (1,5,7,9).

19. Găsirea traseului de cost total minim se reduce la determinarea drumului de valoare minimă între vârfurile 0 şi 8 din graful dat. Drumurile corespunzătoare valorii minime 19, sunt:

A = (0,1,5,6,7,8), B = (0,1,6,7,8), C = (0,1,5,7,8).

Din punct de vedere economic, existenţa soluţiei multiple (A şi C) oferă posibilitatea alegerii, după nevoie, a unuia sau a celuilalt drum; în cazul de faţă, vom alege drumul A, care trece prin centrul industrial 5, ca şi drumul C, în plus, la acelaşi cost, şoseaua trece prin cele mai multe localităţi.

20. Se caută ruta corespunzătoare drumului de valoare minimă în graful care dă sistemul de linii ferate între localităţi. Corespunzător valorii minime 6, se obţine ruta (0,1,4,6).

21. Drumul corespunzător valorii minime 28: (0, 1, 2, 3, 5, 4, 9, 8, 7, 11, 10, 12).

22. Se găsesc drumurile: (1,2,4,5,6,7) şi (1,2,5,6,7) a căror valoare este 18.

23. Drumul (0,1,2,5,6) sau (0,1,2,4,6) cu valoarea maximă 15.

24. Drumul (0,2,4,5,7,8) are valoarea maximă 12.

25. Determinarea rutelor, pentru care beneficiul obţinut este maxim, se reduce la determinarea drumului de valoare maximă între vârfurile 0 şi 7, ale grafului dat. Drumurile de valoare maximă 22 sunt:

(0,1,2,3,4,5,6,7), (0,2,3,4,5,6,7), (0,1,2,3,4,5,7),
(0,2,3,4,5,7), (0,1,2,3,4,7), (0,2,3,4,7).

În funcţie de numărul mijloacelor de transport existente, care diferă de la o zi la alta, se poate alege una sau mai multe din rutele indicate; valoarea maximă găsită 22, reprezintă beneficiul maxim.

26. Dacă fiecărui arc, care are extremitatea finală în vârful j, îi ataşăm valoarea corespunzătoare vârfului, atunci turneele ce vor trebui cîştigate sunt date de succesiunea vârfurilor care determină drumul de valoare maximă între 0 şi 8.

Drumul de valoare maximă 25 determină un număr de 6 turnee care vor trebui cîştigate; ordinea acestor turnee este dată de de succesiunea vârfurilor din drumul (0,1,2,4,7,6,8); numărul maxim de puncte ce se pot obţine este 25.

27. $A=\{4,5,6,7\}$- mulţimea vârfurilor nemarcate

$\omega^{-}(A)=\{(1,4),(2,4),(2,5),(3,6)\}$- tăietura

$f_{\max}=c(\omega^{-}(A))=14$.

28. Planul optim de transport cerut, este determinat de fluxul maxim ce traversează reţeaua. Aplicînd algoritmul Ford-Fulkerson plecînd de la fluxul iniţial egal cu zero, se determină un flux maximal care ne dă planul optim de transport. Valoarea fluxului maxim este determinată de capacitatea secţiunii minimale: $\omega^{-}(A)=\{(1,6),(5,6),(5,7),(4,7),(8,9)\}$ şi $f_{\max}=c(\omega^{-}(A))=28$; de aici, deducem că într-o primă etapă, putem trimite din portul 0 spre portul 9, un număr de 28 vapoare.

29. $A=\{1,2,4,5,6,7\}$- mulţimea vârfurilor nemarcate

$\omega^{-}(A)=\{(0,1),(0,2)(3,5),(3,6)\}$- tăietura

$f_{\max}=c(\omega^{-}(A))=c(0,1)+c(0,2)+c(3,5)+c(3,6)=8+5+2+4=19$

30. $A=\{1,2,4,5,6\}$- mulţimea vârfurilor nemarcate

$\omega^{-}(A)=\{(0,1),(0,2),(3,4),(3,5)\}$- tăietura

$f_{\max}=c(\omega^{-}(A))=c(0,1)+c(0,2)+c(3,4)+c(3,5)=7+6+2+5=20$

31. $A=\{7,8,9,10\}$, $\omega^{-}(A)=\{(1,7),(4,10),(6,8),(5,10),(3,9)\}$

$f_{\max}=c(\omega^{-}(A))=10+10+1+10+10=41$

32. Definim un graf (fig. 3.57), care are 5 vârfuri corespunzătoare produselor date. Problema revine la determinarea drumului hamiltonian în acest graf orientat care nu are circuite.

Deoarece $\sum P(x_i)$ = $\dfrac{n(n-1)}{2}$ =10, graful are un drum hamiltonian. Succesiunea vârfurilor grafului, dată de ordinea descrescătoare a puterilor de atingere, determină drumul hamiltonian $d_H=(P_3,P_2,P_4,P_5,P_1)$, care ne dă şi ordinea de prelucrare a produselor.

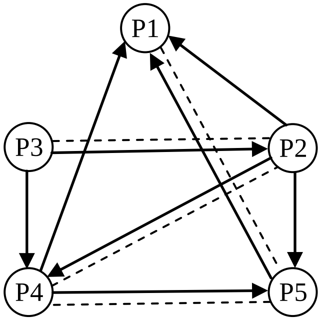


Fig 3.57

33. $L^5 = L^4(l.)L^* =$

1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	3
452631	0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	0	5
634521	0	0	0	0	0	6

Fig.3.58

34. Problema revine la cercetarea drumurilor hamiltoniene pentru graful considerat. Din matricea drumurilor

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$P(x_i)$
x_1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0	1	3
x_3	1	0	0	0	0	0	1
x_4	1	0	1	0	1	1	4
x_5	1	0	0	0	0	1	2
x_6	0	0	0	0	0	0	0

Fig.3.59

se observă că $\sum P(x_i) \neq \frac{n(n-1)}{2}$, deci asigurarea transportului cu numărul existent de benzi nu se poate face.

Dacă în triangularizarea matricei drumurilor vom alege o asemenea ordine încît numărul zerourilor care se aşază imediat deasupra diagonalei principale să fie cît mai mic (alegînd dintre liniile cu aceeaşi putere de atingere cele corespunzătoare coloanelor cu mai puţine zerouri), vom obţine următoarea matrice:

	x_4	x_5	x_2	x_6	x_3	x_1
x_4	0	1	0	1	1	1
x_5	0	0	$[0]$	1	0	1
x_2	0	0	0	1	1	1
x_6	0	0	0	0	$[0]$	0
x_3	0	0	0	0	0	1
x_1	0	0	0	0	0	0

Fig.3.60

Adăugarea arcelor (5,2) şi (6,3), ceea ce corespunde la instalarea benzilor între secţiile 5,2 şi 6,3, asigură transportul produsului între cele 6 secţii, care va trebui organizat în ordinea: 4,5,2,6,3,1.

35. Deoarece numărul elementelor diferite de zero este $15 \neq \frac{n(n-1)}{2}$, în graful dat nu există un drum hamiltonian. Adăugarea arcelor (6,4) şi (3,7) asigură existenţa drumului hamiltonian $d_H = (2,6,4,5,3,7,1)$.

36. $L^6 = L^5(l.)L^* = L^4(l.)(L^2)^* =$

1	2	3	4	5	6	
1254361	0	0	0	0	0	1
0	2543612	0	0	0	0	2
0	0	3612543	0	0	0	3
0	0	0	4361254	0	0	4
0	0	0	0	5436	0	5
0	0	0	0	0	6125436	6

Fig.3.61

37. $d_H = (4,5,2,6,3,1)$.

38. $d_H = (4,6,5,1,2,3)$.

39. $L^3 = L^2(l.)L^* =$

1	2	3	4	
0	0	1243	1234	1
2431 2341	0	0	0	2
3241	3412	0	3124	3
0	4312	0	0	4

Fig.3.62

40. $d_H = (1,2,5,6,3,4)$.

41. Drumurile hamiltoniene:
(1,3,4,2,5,6,8,7), (3,4,1,2,5,6,8,7), (4,1,3,2,5,6,8,7),
(1,3,4,2,6,8,5,7), (3,4,1,2,6,8,5,7), (4,1,3,2,6,8,5,7).

Bibliografie

1. V. Beşliu. Ciclu de prelegeri “Matematica discretă”. - Chişinău, U.T.M., 2001.
2. О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. Дискретная математика для инженера. - Москва, Энергоатомиздат, 1988.
3. О. Е. Акимов. Дискретная математика. Логика, группы, графы. - Москва, Лаборатория базовых знаний, 2001.
4. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – Москва, Физматлит, 2001.
5. Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике. - Москва, Наука, 1977.
6. Р. Хаггарти. Дискретная математика для программистов. - Москва, Техносфера, 2004.

Cuprins